



Flip7 - Regeln

Die 94 Karten

Zahlenkarten (0–12): eine 1, zwei 2en, drei 3en . . . zwölf 12en (und eine 0).

Aktionskarten: gibt es je 3 Mal

- **Freeze:** Zielspieler*in muss sofort stoppen.
- **Flip Three:** Zielspieler*in zieht genau 3 Karten.
- **Second Chance:** Kann behalten und später zusammen mit einer doppelten Karte abgelegt werden.

Modifikatoren: ($\times 2$, +10, +8, +6, +4, +2): Gibt es je einmal. Verdoppelt die Summe oder addiert Punkte zur Summe (Mal vor Plus).

Spielablauf

1. **Austeilen:** Der Dealer gibt reihum je 1 Karte offen an alle Spielenden (inkl. sich selbst).
2. **Zugoptionen:** Im Uhrzeigersinn wählt jede aktive Spieler*in:
 - **Noch eine:** Eine weitere Karte bekommen.
 - **Stopp:** Karten umdrehen und Punkte sichern. Keine weiteren Karten mehr.
3. **Verzockt:** Wird eine Zahl gezogen, die bereits vor einem liegt, scheidet man für diese Runde aus $\Rightarrow$ **0 Punkte**.
4. **Aktionskarten** müssen sofort aufgelöst werden. Die ziehende Person wählt, wer die Karte erhält (sich selbst oder eine andere aktive Spieler*in). Ist man die letzte aktive Spieler*in, muss man sie selbst nehmen.

Rundenende & Wertung

Die Runde endet, wenn alle gestoppt haben oder ausgeschieden sind, oder jemand 7 verschiedene Zahlenkarten (Flip 7) hat (Letzteres bringt 15 Extrapunkte). Wer nicht ausgeschieden ist, erhält

$$S \cdot (\delta_{x2} + 1) + X + 15 \delta_{\text{Flip7}}$$

Punkte. Dabei ist S die Summe der Zahlenkarten, X die Summe der Boni, und $\delta = 1$, falls die entsprechende(n) Karte(n) vorhanden sind, sonst ist $\delta = 0$. Wer zuerst **200 oder mehr Punkte** erreicht, gewinnt das Spiel.



Modellierung

Um das Spiel mathematisch zu untersuchen, ist es zunächst hilfreich, es zu vereinfachen. Der Kern des Spiels sind die Zahlenkarten. Eine naheliegende Möglichkeit der Vereinfachung wäre also:

- Wir ignorieren die Sonderkarten und Modifikationskarten.
- Wir ignorieren die 0 (da sie etwas aus der Reihe fällt und nicht null Mal vorhanden ist).
- Wir ignorieren Sonderpunkte (Flip 7).
- Wir gehen von einer einzigen Spieler*in aus.
- Wir wollen den durchschnittlichen Gewinn pro Runde maximieren (d. h. wir ziehen den Spielstand nicht mit ein).
- Wir gehen davon aus, dass die Karten vor jeder Runde neu gemischt werden.
- Für den Anfang gehen wir sogar davon aus, dass immer *eine* 1, *zwei* 2en, . . . *zwölf* 12en im Stapel sind, aus dem gegeben wird.

Wenn wir dieses vereinfachte Setting verstanden haben, können wir die obigen Punkte nach und nach mit dazunehmen. Vielleicht sollten wir es aber auch nicht bis ganz zum Ende analysieren, da uns dies den Spaß am Spiel nehmen könnte.

Aufgabe 1

Finde eine Strategie für das vereinfachte Spiel, welche den erwarteten (durchschnittlichen) Gewinn pro Runde maximiert.

Wenn euch diese Aufgabe so allgemein schwerfällt oder euch der Ansatz fehlt, findet ihr auf der folgenden Seite weitere Aufgaben, die das Problem in kleineren Schritten behandeln.



Kleinschrittige Aufgaben

Aufgabe 2 Bestimmt die Anzahl der Karten im Stapel (im Spiel).

Aufgabe 3 Bestimmt den durchschnittlichen Wert einer gezogenen Karte.

Aufgabe 4 Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, eine Karte zu ziehen, die schon liegt. Dies ist natürlich abhängig von den liegenden Karten. Ihr könnt für den Anfang die folgenden Fälle betrachten:

1. Es liegt eine 1 und eine 12.
2. Es liegen eine 2, eine 3 und eine 8.

Aufgabe 5 Bestimmt den erwarteten Zugewinn (gezogene Punkte, wenn nicht doppelt) und den erwarteten Verlust (Punkte, die verloren gehen, wenn doppelt) beim Zug einer weiteren Karte. Dies ist wieder abhängig von den liegenden Karten. Schaut euch ggf. einzelne Beispiele an, bevor ihr euch an einer allgemeinen Formel versucht.



Verallgemeinerungen

Wir entfernen den letzten Punkt aus der Modellierungsliste, d. h. wir wollen die Karten, die vor uns liegen, bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der neuen Karten berücksichtigen.

Aufgabe 6 Überlegt zunächst heuristisch, wie das eure Strategie verändert. Müsst ihr vorsichtiger sein, oder könnt ihr mehr Risiko eingehen (mehr Karten ziehen)?

Aufgabe 7 Angenommen, es liegen k Karten vor euch mit insgesamt A Punkten. Löst Aufgaben 3 bis 5 unter Berücksichtigung von k und A .

Aufgabe 8 Leitet eine optimale Strategie ab. Von welchen Werten hängt die Strategie ab?

Aufgabe 9 Erweitert die Strategie so, dass sie auch die liegenden Karten anderer Spieler*innen mit einbezieht.

Andere Verallgemeinerungen

Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Sie können zunächst aufbauend auf Aufgabe 1 bearbeitet werden.

Aufgabe 10 Bezieht +X-Karten und den Flip-7-Bonus mit ein.

Aufgabe 11 Bezieht die $\times 2$ -Karte mit ein.

Aufgabe 12 Bezieht die Second-Chance-Karte oder die Flip-Three-Karte mit ein. Erklärt, warum die Freeze-Karte ignoriert werden kann.



Lösungen

Lösung 1 Diese Lösung baut auf den Lösungen von 2-5 auf.

Um die Punkte pro Runde zu Maximieren, sollten wir immer dann eine weitere Karte ziehen, wenn der durchschnittliche Zugewinn durch eine weitere Karte größer ist, als der durchschnittliche Verlust durch eine doppelte Karte.

$$E_Z > E_V \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{3} \left(1 - \frac{A}{78}\right) > \frac{A^2}{78} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow A < \frac{65}{3} \approx 21.67. \quad (3)$$

Es sollte also eine Weitere Karte gezogen werden, solange maximal 21 Punkte auf dem Tisch liegen.

Lösung 2 Es gibt $\sum_{n=1}^{12} n = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ Karten.

Lösung 3 Der durchschnittliche Wert ist

$$W = \frac{1}{78} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 12 \cdot 12) = \frac{1}{78} \sum_{n=1}^{12} n^2 = \frac{25}{3}.$$

Lösung 4 Wir gehen der Einfachheit halbe weiterhin davon aus, dass der Stapel aus dem wir ziehen aus 1er Eins, 2 Zweien, ..., 12 Zwölfen besteht.

1. Im Stapel sind 78 Karten, davon eine Eins und 12 Zwölfen. Die Wahrscheinlichkeit eine 1 oder 12 zu ziehen ist also:

$$P(1 \text{ oder } 12) = \frac{1 + 12}{78} = \frac{1}{6}.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit eine 2, 3 oder 8 zu ziehen ist:

$$P(2, 3 \text{ oder } 8) = \frac{2 + 3 + 8}{78} = \frac{1}{6}.$$

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeit nur Abhängig von der Summe der Kartenwerte, nicht von den einzelnen Karten, ist. Ist A die Summe der Kartenwerte, so gilt:

$$P(\text{Ziehen einer doppelten Karte bei } A \text{ liegenden Augen}) = \frac{A}{78}.$$

Lösung 5 Sei wieder W der durchschnittliche Wert der gezogenen Karte, A die Summe der liegenden Karten. Der durchschnittliche Zugewinn ist

$$E_Z = W \cdot P(\text{Karte nicht doppelt}) = W \left(1 - \frac{A}{78}\right) = \frac{25}{3} \left(1 - \frac{A}{78}\right).$$

Der durchschnittliche Verlust durch eine doppelt gezogenen Karte ist

$$E_V = A \cdot P(\text{Karte ist doppelt}) = A \frac{A}{78} = \frac{A^2}{78}.$$



Lösung 6 Wir können ein etwas länger neue Karten ziehen/ höheres Risiko eingehen. Die Karten, welche vor uns liegen, sind nicht mehr im Stapel, daher wird es etwas unwahrscheinlicher eine doppelte zu ziehen. Besonders sehen wir das am Beispiel der 1. Liegt diese vor uns, ist sie nicht mehr im Stapel und kann nicht gezogen werden.

Lösung 7 Der durchschnittliche Wert einer neu gezogenen Karte ist:

$$W = \frac{\sum_{n=1}^{12} n^2 - A = \frac{25}{3}}{\sum_{n=1}^{12} n - k} = \frac{650 - A}{78 - k}.$$

Im Nachziehstapel liegen noch $78 - k$ Karten. Liegt eine Karte mit Augenzahl L vor dir, so sind noch $L - 1$ Karten mit dieser Augenzahl im Stapel. Insgesamt sind also noch $A - k$ Karten - mit Augenzahlen, die schon vor dir liegen - im Stapel. Der durchschnittliche Zugewinn ist also:

$$E_Z = W \cdot P(\text{Karte nicht doppelt}) = W \left(1 - \frac{A - k}{78 - k} \right) = \frac{(78 - A)(650 - A)}{(78 - k)^2}.$$

Der durchschnittliche Verlust durch eine doppelt gezogenen Karte ist

$$E_V = A \cdot P(\text{Karte ist doppelt}) = A \frac{A - k}{78 - k}.$$

Wir setzen nun den erwarteten Gewinn und Verlust gleich:

$$\begin{aligned} E_Z &= E_V \\ \Rightarrow \frac{(78 - A)(650 - A)}{(78 - k)^2} &= A \frac{A - k}{78 - k} \\ \Rightarrow A(A - k)(78 - k) &= (650 - A)(78 - k) \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{2}(\sqrt{2601 - 2k + k^2} + k - 1). \end{aligned}$$

Wir können nun einzelne Werte für k einsetzen, siehe nächste Lösung.

Lösung 8 Die Strategie hängt nun von der Anzahl der Karten k und der Summe der Karten A ab. Zu jedem k haben wir nun einen optimalen Wert A_k . Liegen bei k Karten maximal A_k Punkte, so ziehen wir weiter.

k	A_k
2	21
3	22
4	22
5	23
6	24
≥ 7	25

Sieben verschiedene Karten sind mindestens 28 Punkte, hier stoppen wir also immer.