



Die Mathematik der Farben

Wir beschäftigen uns 3 Wochen lang mit der Mathematik der Farben, insbesondere der Geometrie der Farben.

Es gibt viele verschiedene Antworten auf diese Frage.

1 Was ist eigentlich Farbe?

Überlegt zunächst selbst: Was ist Farbe? Wie lässt sich Farbe definieren?

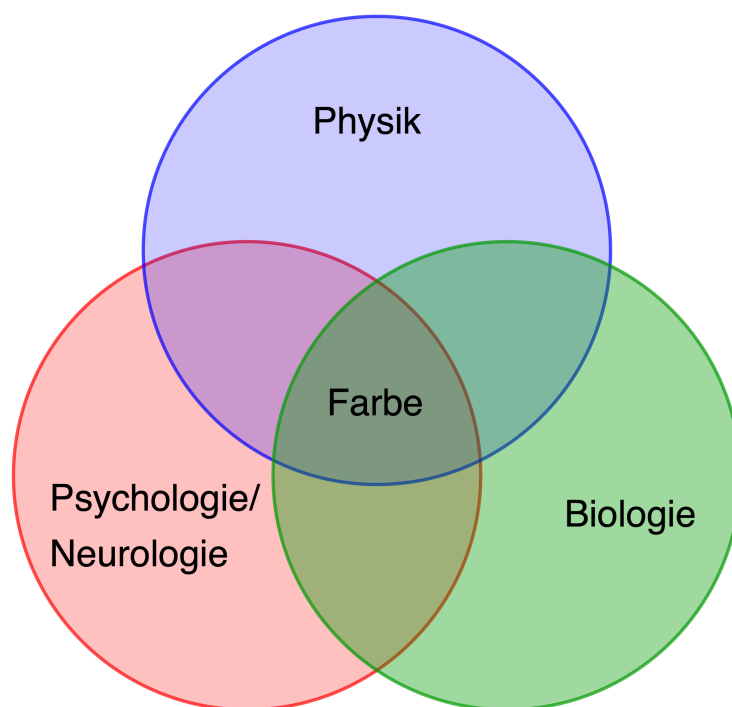


Figure 1: Farbe ist ein Zusammenspiel aus physikalischen, biologischen und psychologischen Effekten und Eigenschaften

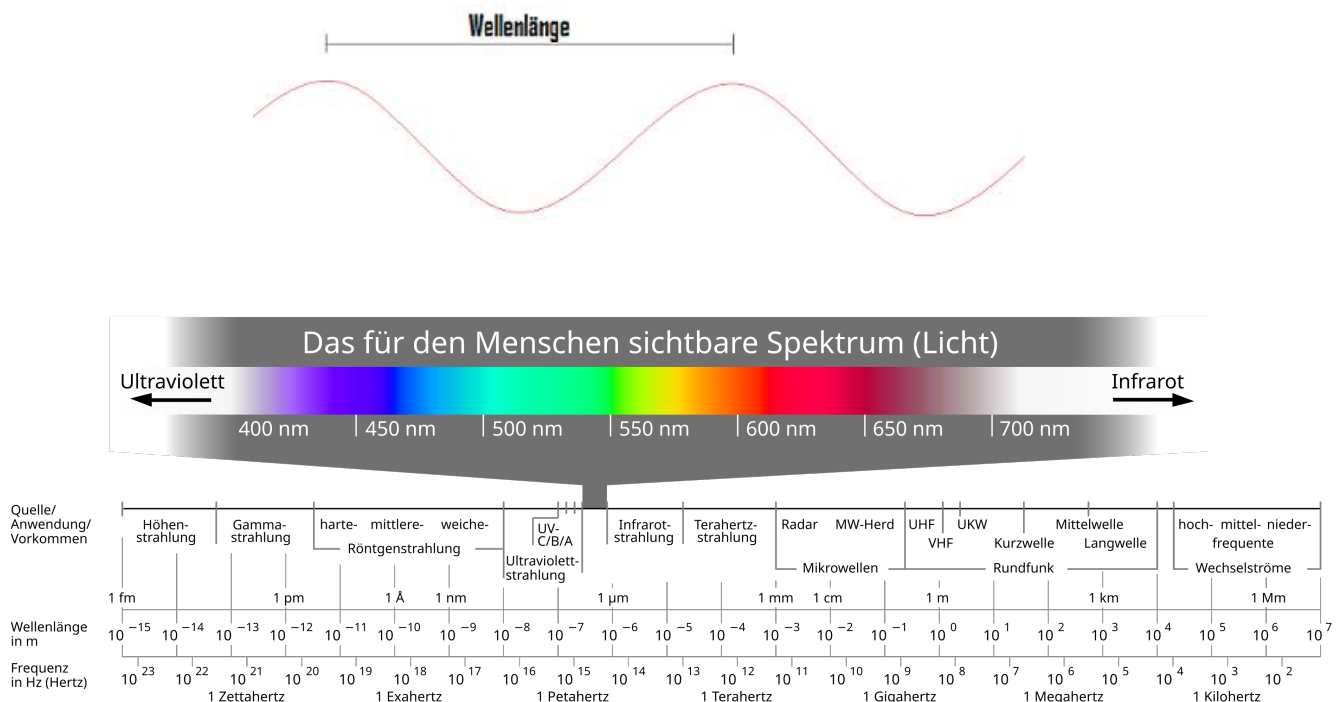
1.1 Exkurs: Physik

Elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen zwischen ca. 380 nm und 780 nm können vom menschlichen Auge als Licht wahrgenommen werden. Dies ist nur ein sehr kleiner Teil des



elektromagnetischen Spektrums.

Licht unterschiedlicher Wellenlängen wird als unterschiedliche *Farbe* wahrgenommen.

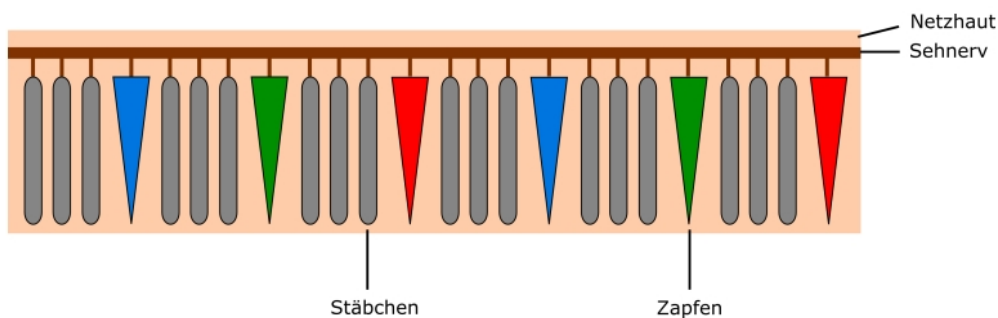


Frage: Wo befinden sich Pink oder Magenta auf diesem Spektrum?

Sie sind nicht enthalten. Um zu verstehen, warum das so ist, müssen wir uns die Biologie des Auges anschauen.

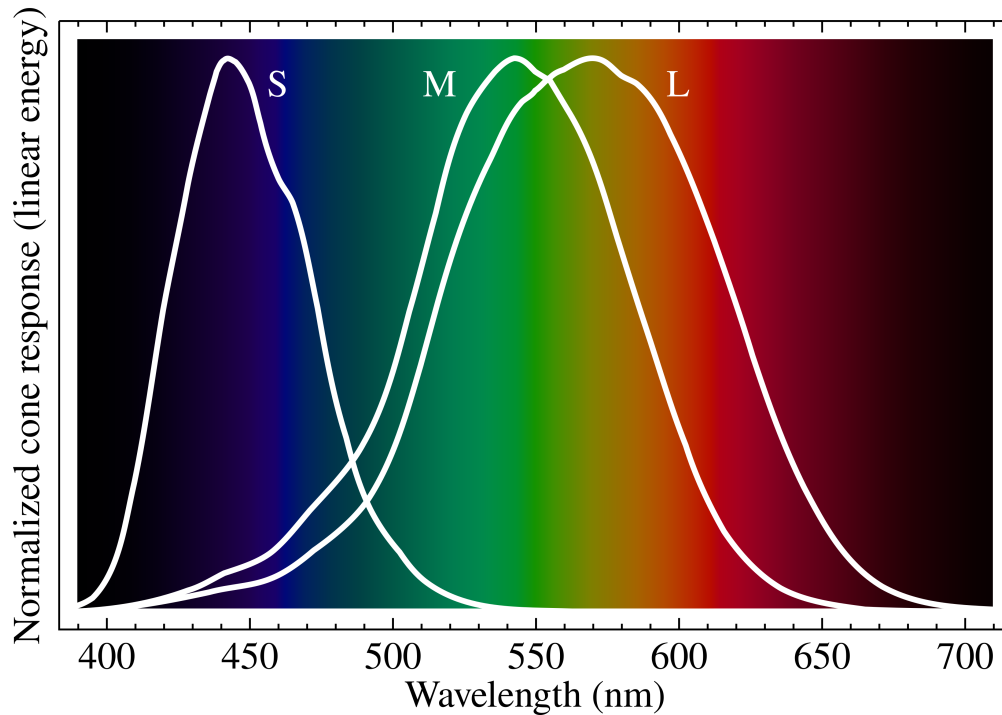
1.2 Exkurs: Biologie

Auf der Netzhaut des Auges befinden sich verschiedene Sehzellen: die Stäbchen und die Zapfen. Die Stäbchen können nur Hell/Dunkel wahrnehmen. Die Zapfen sind für die Farbsicht zuständig.





Die meisten Menschen haben 3 Arten von Zapfen: S , M , L , die jeweils empfindlich für kurze Wellenlängen (S wie *short*), mittlere Wellenlängen (M wie *middle*) und längere Wellenlängen (L wie *long*) sind. Hier sehen wir die normierte (das heißt, bei allen ist das Maximum 1) Empfindlichkeit der Zapfen abhängig von der Wellenlänge:

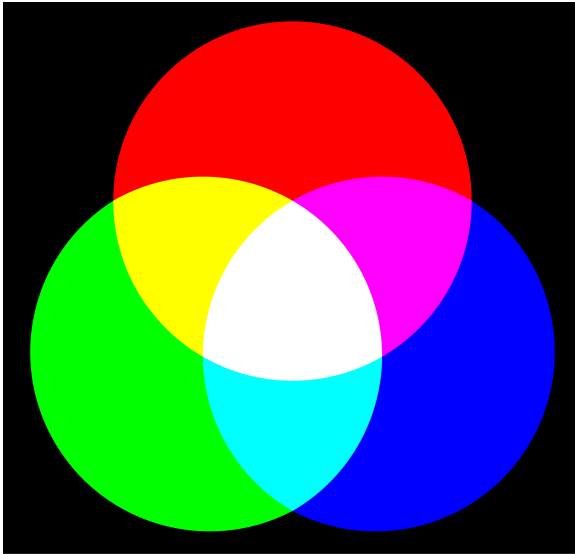


Die Zapfen senden nun unterschiedlich starke Signale an das Gehirn, abhängig davon, wie stark sie angesprochen werden. Das Gehirn interpretiert diese Signale dann als *Farbe*.

2 Mathematik und Farbe

Was hat nun Farbe mit Mathematik zu tun? Einige Aspekte sind:

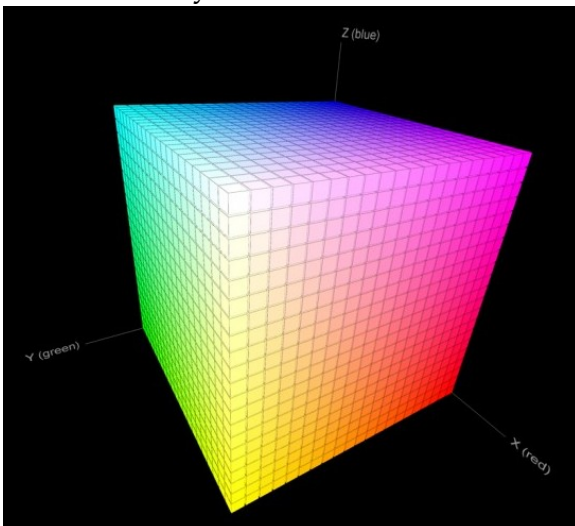
- Farben können addiert und subtrahiert werden.



- Wir können Abstände zwischen Farben definieren und Farben danach ordnen.



- Wir können Systeme entwerfen, um Farbwerte auf einem Computer zu speichern.



- Wir können versuchen, mathematisch zu bestimmen, was alle möglichen Farben sind.



2.1 Exkurs – Vektorräume

Viele dieser Dinge können wir mit Werkzeugen der Algebra, insbesondere mit Vektorräumen, tun. In einem Vektorraum sammeln wir verschiedene Werte/Daten als Punkte in einem mehrdimensionalen Raum.

Definition 1 (Vektorraum $\mathbb{R}^n$) Seien $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen (oder ein anderer Körper) und n eine natürliche Zahl, so ist das n -fache kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}\},$$

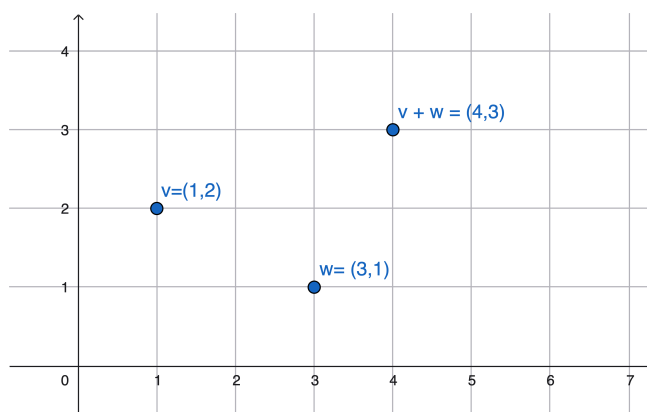
also die Menge aller n -Tupel mit Einträgen in $\mathbb{R}$, ein Vektorraum. Wir addieren komponentenweise: Für $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$u + v = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

Ebenso multiplizieren wir mit einer Zahl (einem Skalar) $c \in \mathbb{R}$:

$$c \cdot v = c \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (c v_1, c v_2, \dots, c v_n).$$

Für $n = 2$ oder $n = 3$ stellen wir die Vektoren häufig als Punkte in einem Koordinatensystem dar:



Aufgabe 1 Sei $n = 2$ und $u = (1, 5)$, $v = (2, 3)$ und $w = (4, 2)$.

Berechne $u + v$, $2 \cdot v$, $\frac{1}{2}w$, $\frac{1}{2}(u + w)$ und $\frac{1}{4}w + \frac{3}{4}v$. Kannst du die letzten beiden Aufgaben geometrisch interpretieren?

2.2 Exkurs – Kurven

Eine Abbildung eines Intervalls (denke *Linie*) in einen Vektorraum nennen wir *Kurve*. Formal bedeutet das:

Definition 2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Kurve* ist eine (stetige) Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

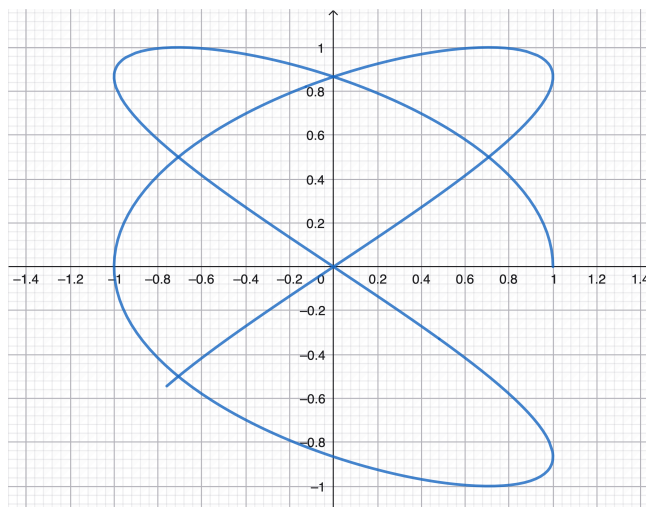


Figure 2: Der Graph der Kurve $[0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(3t), \sin(2t))$

Beispiele:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

beschreibt einen Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 Zeichne die Kurven

$$\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, t^2)$$

und

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^2, t)$$

2.3 Exkurs – konvexe Hülle

Die *konvexe Hülle* H einer Menge M ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält. H enthält alle Verbindungslinien in M .

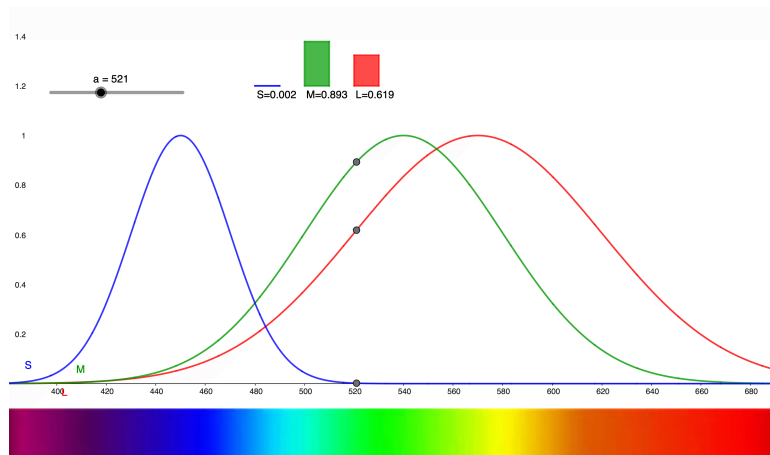
Aufgabe 3 Bestimme die konvexe Hülle von

1. $M = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$
2. $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

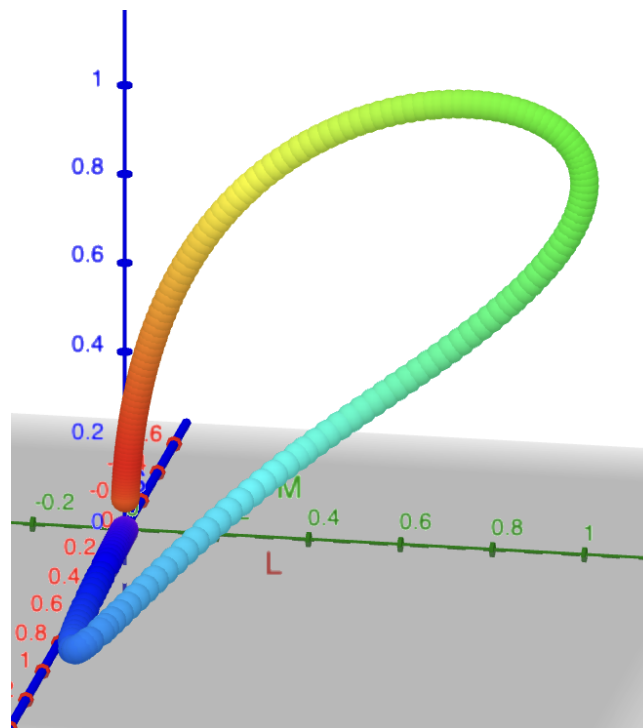
3 Farbräume

Wir schauen uns in Geogebra ein Model der Zapfenreaktion auf Licht unterschiedlicher Wellenlängen an: <https://www.geogebra.org/m/qj8bsdmc>.

Die Reaktion der drei verschiedenen Zapfen stellen wir in einem dreidimensionalen Vektorraum dar. Dabei bestimmt jeder Zapfentyp eine Achse. Wir nennen dies den **LMS-Raum**. Einfarbigem Licht einer Wellenlänge von 521 nm ergibt in unserem Modell z.B. $v = (0.002, 0.893, 0.619)$



Tun wir dies für alle Wellenlängen des sichtbaren Lichts, bekommen wir eine Kurve im LMS-Raum. Dies könnt ihr selbst in Geogebra austesten: <https://www.geogebra.org/m/gn3fdxxg> Eine etwas übersichtlichere Version in zwei Dimensionen gibt es hier: <https://www.geogebra.org/m/cbxxmayd>. Dies entspricht einer Modellierung des Sehens einer Person mit Rot-Grün-Farbenblindheit.



3.1 Mischung von Farben

Licht besteht normalerweise nicht nur aus einer Wellenlänge. Was passiert, wenn es verschiedene Wellenlängen gibt? Wir sprechen von einem *Farb-Spektrum*.

Mischungen von Farben modellieren wir als Zwischenwerte in unserem Vektorraum. Mischen wir z.B. grünes Licht, repräsentiert durch einen Vektor v und blaues Licht, repräsentiert durch

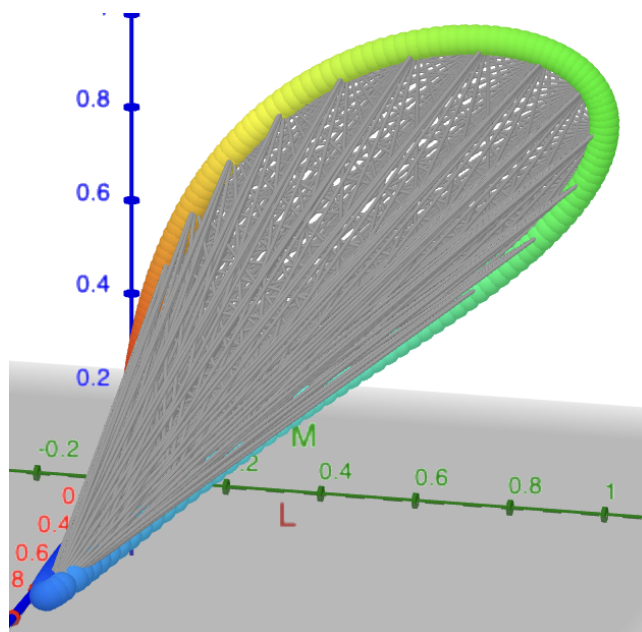


w zu gleichen Anteilen, so wird die Mischung durch

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$$

repräsentiert.

Die Menge aller durch Mischung möglichen Farben ist dann die konvexe Hülle unserer Farbkurve:

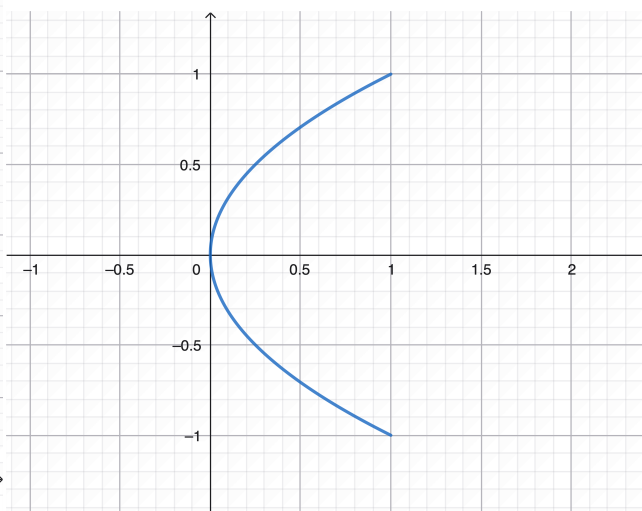
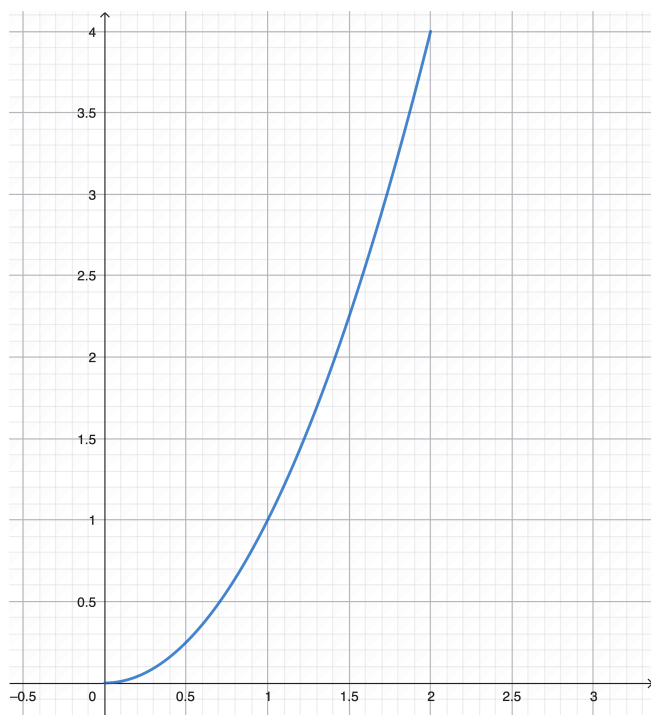


Lösungen

Lösung 1 $u + v = (3, 8)$, $2 \cdot v = (4, 6)$, $\frac{1}{2}w = (2, 1)$, $\frac{1}{2}(u + w) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ und $\frac{1}{4}w + \frac{3}{4}v = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$.

Die letzten beiden Ergebnisse sind Zwischenwerte, die auf der Verbindungsline zwischen den Vektoren liegen.

Lösung 2



- Lösung 3**
1. $M = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$, H ist das Quadrat $H = [-1, 1]^2$
 2. $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, H ist die Einheitskreisscheibe $H = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$