Schuljahr 2025/26
Angewandte Mathematik

Die Mathematik der Farben

Wir beschäftigen uns 3 Wochen lang mit der Mathematik der Farben, insbesondere der Geometrie der Farben.
Es gibt viele verschiedene Antworten auf diese Frage.

1 Was ist eigentlich Farbe?

Überlegt zunächst selbst: Was ist Farbe? Wie lässt sich Farbe definieren?

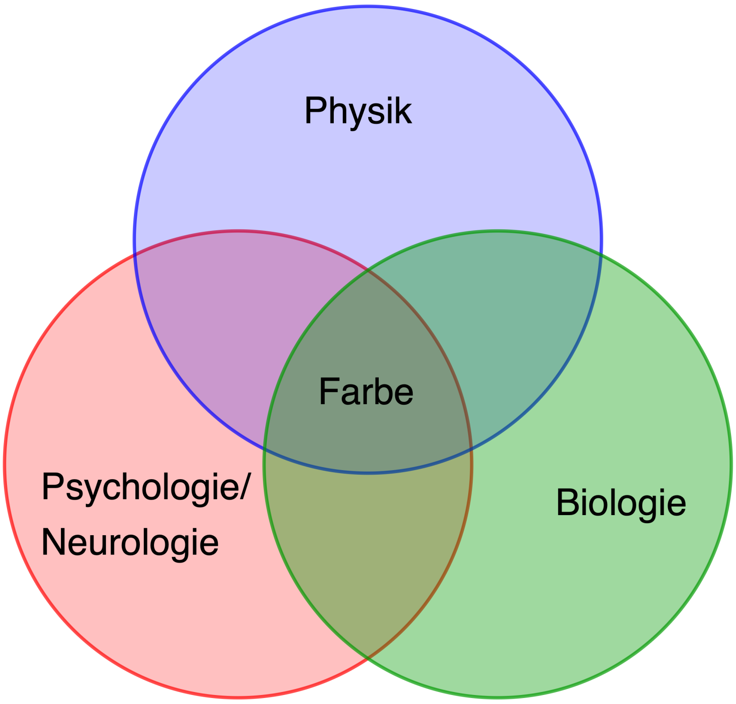


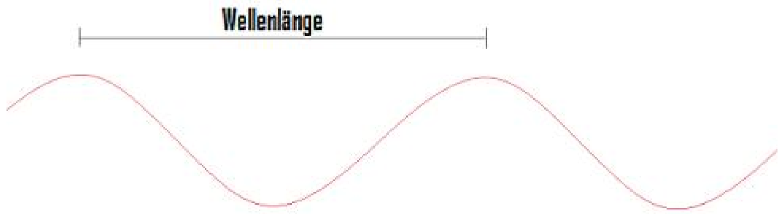
Figure 1: Farbe ist ein Zusammenspiel aus physikalischen, biologischen und psychologischen Effekten und Eigenschaften

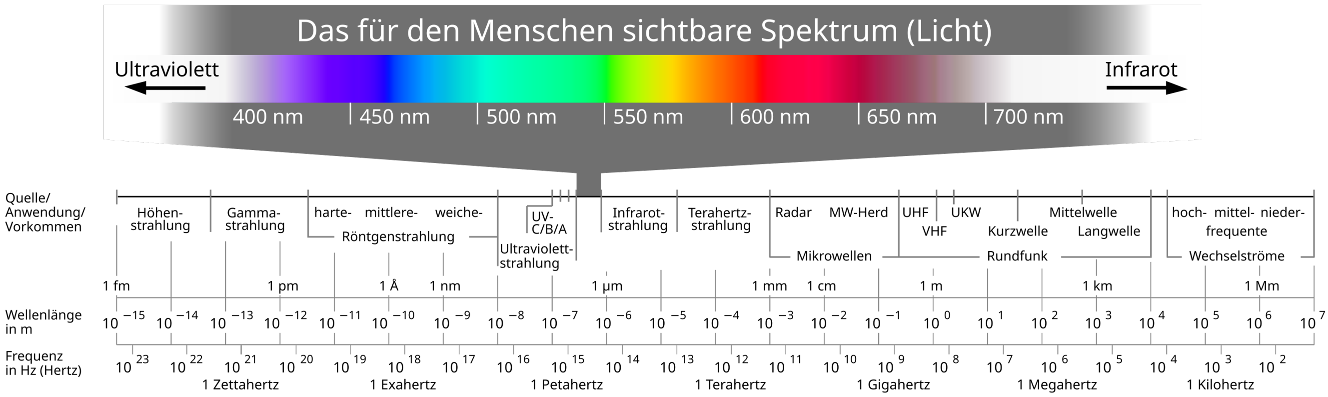
1.1 Exkurs: Physik

Elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen zwischen ca. 380 nm und 780 nm können vom menschlichen Auge als Licht wahrgenommen werden. Dies ist nur ein sehr kleiner Teil des

SH Schleswig-Holstein Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur
Europa-Universität Flensburg
CAU Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
UNIVERSITÄT ZU LÜBECK

elektromagnetischen Spektrums.
Licht unterschiedlicher Wellenlängen wird als unterschiedliche *Farbe* wahrgenommen.



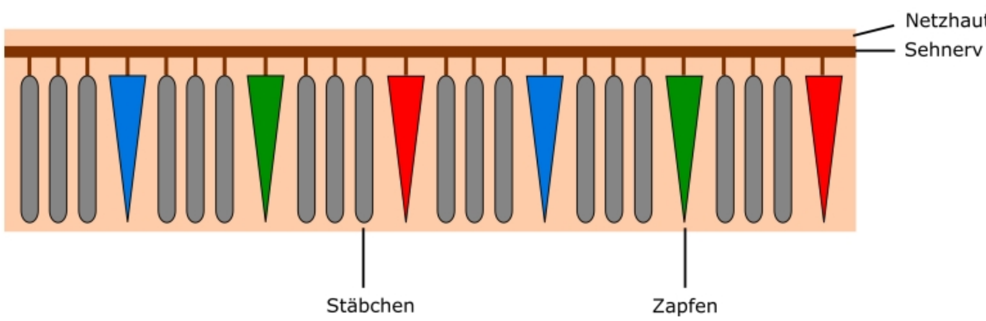


Frage: Wo befinden sich Pink oder Magenta auf diesem Spektrum?

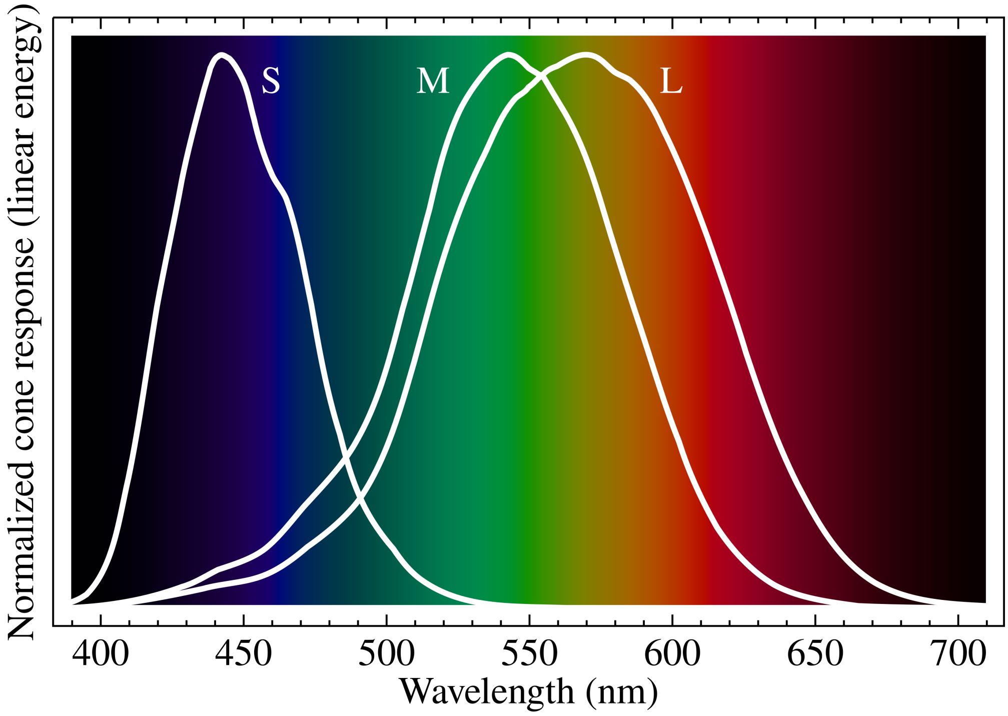
Sie sind nicht enthalten. Um zu verstehen, warum das so ist, müssen wir uns die Biologie des Auges anschauen.

1.2 Exkurs: Biologie

Auf der Netzhaut des Auges befinden sich verschiedene Sehzellen: die Stäbchen und die Zapfen. Die Stäbchen können nur Hell/Dunkel wahrnehmen. Die Zapfen sind für die Farbsicht zuständig.



Die meisten Menschen haben 3 Arten von Zapfen: *S, M, L*, die jeweils empfindlich für kurze Wellenlängen (S wie *short*), mittlere Wellenlängen (M wie *middle*) und längere Wellenlängen (L wie *long*) sind. Hier sehen wir die normierte (das heißt, bei allen ist das Maximum 1) Empfindlichkeit der Zapfen abhängig von der Wellenlänge:

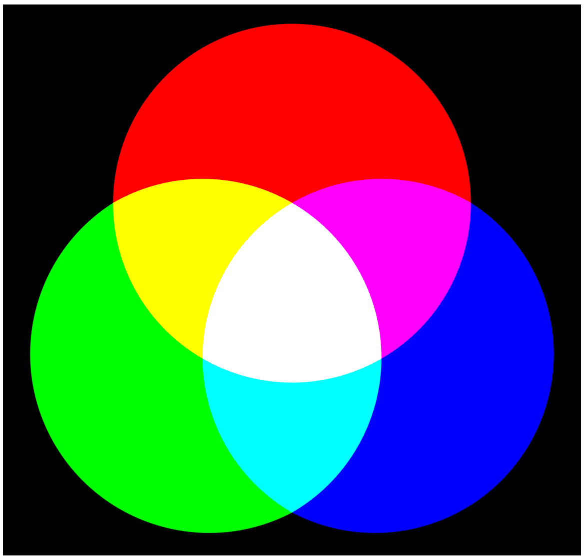


Die Zapfen senden nun unterschiedlich starke Signale an das Gehirn, abhängig davon, wie stark sie angesprochen werden. Das Gehirn interpretiert diese Signale dann als *Farbe*.

2 Mathematik und Farbe

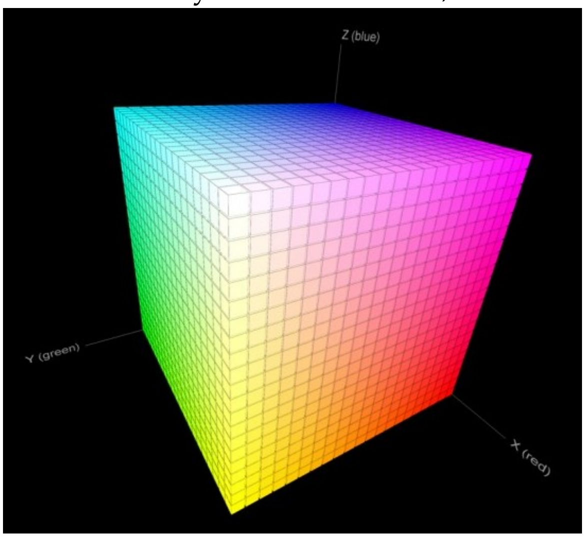
Was hat nun Farbe mit Mathematik zu tun? Einige Aspekte sind:

- Farben können addiert und subtrahiert werden.



- Wir können Abstände zwischen Farben definieren und Farben danach ordnen.

- Wir können Systeme entwerfen, um Farbwerte auf einem Computer zu speichern.



- Wir können versuchen, mathematisch zu bestimmen, was alle möglichen Farben sind.

2.1 Exkurs – Vektorräume

Viele dieser Dinge können wir mit Werkzeugen der Algebra, insbesondere mit Vektorräumen, tun. In einem Vektorraum sammeln wir verschiedene Werte/Daten als Punkte in einem mehrdimensionalen Raum.

Definition 1 (Vektorraum $\mathbb{R}^n$) *Seien $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen (oder ein anderer Körper) und n eine natürliche Zahl, so ist das n-fache kartesische Produkt*

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}\},$$

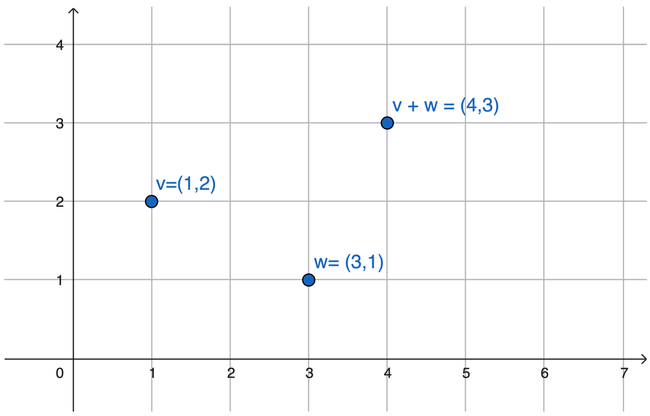
also die Menge aller n-Tupel mit Einträgen in $\mathbb{R}$, ein Vektorraum. Wir addieren komponentenweise: Für $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$u + v = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

Ebenso multiplizieren wir mit einer Zahl (einem Skalar*) $c \in \mathbb{R}$:*

$$c \cdot v = c \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (c\,v_1,\, c\,v_2, \ldots, c\,v_n).$$

Für $n = 2$ oder $n = 3$ stellen wir die Vektoren häufig als Punkte in einem Koordinatensystem dar:



Aufgabe 1 Sei $n = 2$ und $u = (1, 5)$, $v = (2, 3)$ und $w = (4, 2)$.
Berechne $u + v$, $2 \cdot v$, $\frac{1}{2}w$, $\frac{1}{2}(u + w)$ und $\frac{1}{4}w + \frac{3}{4}v$. Kannst du die letzten beiden Aufgaben geometrisch interpretieren?

Lösungen

Lösung 1 $u + v = (3, 8)$, $2 \cdot v = (4, 6)$, $\frac{1}{2}w = (2, 1)$, $\frac{1}{2}(u + w) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ und $\frac{1}{4}w + \frac{3}{4}v = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$.
Die letzten beiden Ergebnisse sind Zwischenwerte, die auf der Verbindungslinie zwischen den Vektoren liegen.