ZT-Aufgaben

Aufgabe 070834

Es sei a eine positive ganze Zahl.

Zeige, dass der Bruch $\dfrac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

Aufgabe 100834

Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, sodass folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Aufgabe 180834

Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar.

Aufgabe 210935

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 250831

Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Aufgabe 270935

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 290834

Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Aufgabe 300834

Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n - 1$, n, $n + 1$ und $n^2 + 1$ eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 330944

Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277{*}{*}607680000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Aufgabe 340935

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Aufgabe 340942

Zeigen Sie, dass die Zahl

$$z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + \cdots + 7^{93} + 7^{95}$$

durch 336 teilbar ist!

Aufgabe 610843

Wir betrachten alle natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und genau 24 Teiler haben.

a) Ermittle die kleinste dieser Zahlen.

b) Ermittle die kleinste dieser Zahlen, die zusätzlich auf 24 endet.

Aufgabe 610845

Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die das Produkt $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ genau 3 Primzahlen als Teiler hat.

Hinweis: Zum Beispiel hat die Zahl 24 ($= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$) genau 2 Primzahlen als Teiler, nämlich 2 und 3.

Aufgabe 620844

Untersuche, ob es voneinander verschiedene natürliche Zahlen m und n größer als 0 gibt, für die es 2^m aufeinanderfolgende natürliche Zahlen und 2^n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen derart gibt, dass die Summe der 2^m Zahlen gleich der Summe der 2^n Zahlen ist.

Aufgabe 620845

Beweise: Für alle natürlichen Zahlen a, b und c mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist $a \cdot b \cdot c$ durch 60 teilbar.

Aufgabe 630844

Ermittle die größte natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Es gibt Primzahlen p_1 bis p_8 kleiner als 200, die nicht notwendigerweise voneinander verschieden sind und für die das Produkt der acht Zahlen $p_1 + 1$, $p_2 + 2$, …, $p_8 + 8$ durch 2^n teilbar ist.