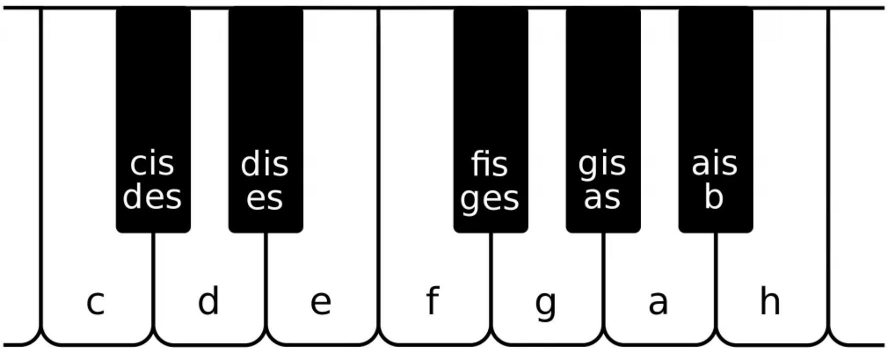
Schuljahr 2025/26
Angewandte Mathematik

Musik und Mathematik

Zum Start des neuen Schuljahres beschäftigen wir uns mit Mathe und Musik.
Was hat das Stimmen eines Klaviers mit der Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu tun und was Akkorde mit Topologie?
Aus der Musiktheorie ergeben sich viele interessante mathematische Fragen. In den ersten 3 Wochen des Kurses werden wir diese genauer untersuchen. Es ist keine musikalische Vorbildung nötig, es ist ja ein Mathe-Kurs (ihr lernt aber nebenbei auch ein bisschen Musiktheorie).

1 Ein paar Hintergründe und Knobelaufgaben

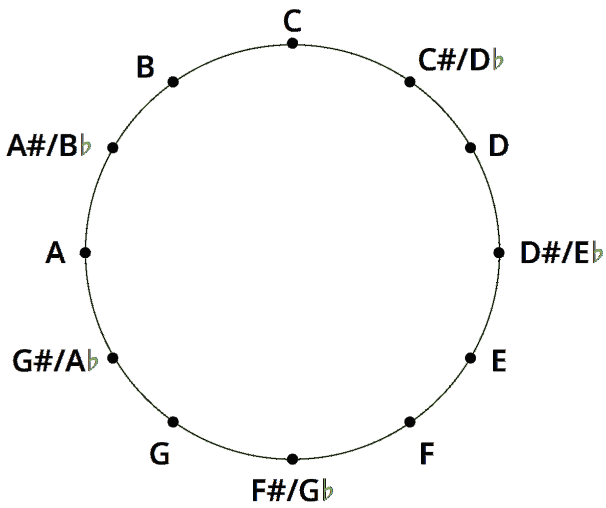
1.1 Die Töne als zyklische Gruppe



In der neueren westlichen Musik wird eine Oktave üblicherweise in 12 Halbtonschritte eingeteilt, die hier auf der Klaviatur zu sehen sind. Nach dem h beginnen wir erneut mit c. Das höhere c wird im Wesentlichen als der gleiche Ton wie das tiefere c wahrgenommen (eben nur höher).

Aufgabe 1 Beginnend bei d wird auf dem Klavier ein (chromatischer) Lauf von 38 Halbtonschritten nach oben gespielt. Auf welchem Ton endet der Lauf?

Genau wie die Stunden auf der Uhr haben die Töne die Struktur einer Gruppe, der $\mathbb{Z}_{12}$. Anschaulich können wir die Töne also auf einem Kreis (also der S^1) anordnen:



Rechnen modulo Die Rechenoperation, die hier verwendet wird, nennt sich modulo. Formal gilt:
Seien a, b und m ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, wobei $m \neq 0$. Es gilt: a und b sind kongruent modulo m, wenn sie bei Division durch m denselben Rest lassen. Wir schreiben:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Andernfalls sind sie inkongruent modulo m:

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

Aufgabe 2 Bestimme eine Lösung für x und gib an, wie viele Lösungen es insgesamt gibt (es gilt $x \in \mathbb{N}$):

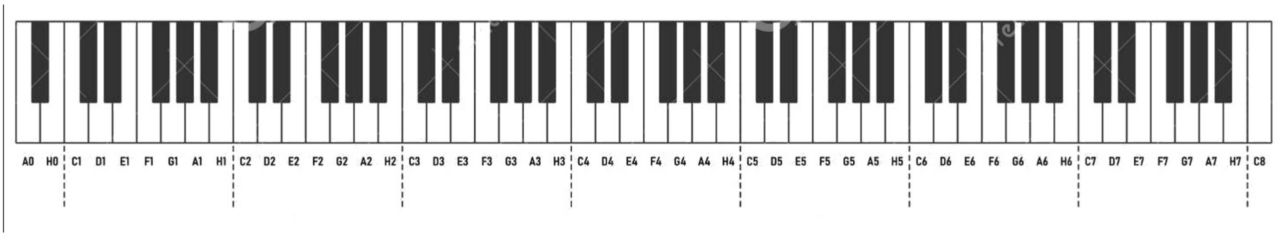
(a) $135 \equiv x \pmod{35}$

(b) $x \equiv 5 \pmod{35}$

(c) $135 \equiv 5 \pmod{x}$

1.2 Frequenzen

Die Tonhöhe wird durch die *Frequenz* bestimmt, d.h. wie oft der Schall pro Sekunde schwingt, die Einheit für einmal pro Sekunde ist *Hertz*, wir schreiben *Hz*. Der für Menschen hörbare Bereich ist in etwa von 20 Hz bis 20.000 Hz = 20 kHz.
Ein Tonabstand von einer Oktave verdoppelt die Frequenz. Z.B. hat ein A die Frequenz 110 Hz, dann hat das nächst höhere A 220 Hz. Generell gilt: Töne, die den gleichen Abstand haben (bzw. von uns so wahrgenommen werden) haben ein gleiches Frequenzverhältnis. Die menschliche Wahrnehmung von Tonhöhen ist sozusagen logarithmisch.
Um Töne verschiedener Oktaven zu unterscheiden, werden sie oft durchnummeriert A_1, A_2, usw. Eine gängige Nummerierung orientiert sich am Klavier. Dort ist der niedrigste Ton A_0, der höchste C_8. Diese Nummerierung werden wir auch hier verwenden.



Aufgabe 3 Der Ton A_4, auch Kammerton genannt, wird üblicherweise auf 440 Hz gestimmt. Berechne die Frequenz von A_0 und A_7.

Aufgabe 4 Berechne, wie viele Oktaven das menschliche Gehör ungefähr wahrnehmen kann.

2 Harmonien

Die einfachste Modellierung der Schwingung eines Tones ist eine Sinusfunktion (diese erzeugt einen sogenannten Sinuston). Der Ton A_4 könnte also durch die Funktion

$$f(t) = \sin(440 \cdot 2\pi\, t)$$

dargestellt werden (wenn t die Einheit Sekunde hat). Allgemeiner nennen wir ν die *Frequenz* der Funktion

$$f(t) = \sin(\nu \cdot 2\pi\, t).$$

Ein Instrument erzeugt nun üblicherweise keine Sinustöne, sondern etwas mit mehr Klangfarbe. Dies geschieht durch die *Obertöne*. *Obertöne* sind Töne mit einem ganzzahligen Vielfachen der Frequenz des Grundtons. Bei einem Ton der Frequenz ν schwingen also auch die Frequenzen $2\nu, 3\nu, 4\nu \ldots$ mit. Je nachdem wie ausgeprägt die verschiedenen Obertöne sind, entsteht die spezifische Klangfarbe eines Instruments.
Schon sehr lange haben sich Menschen gefragt, welche Töne gut zusammen klingen. Eine gängige Theorie, die schon auf die Pythagoräer (ca. 500 v.Chr.) zurückgeht, ist:

Töne klingen schön zusammen, wenn sie gemeinsame Obertöne haben.

Aufgabe 5 Findet Töne, die nach dieser Theorie gut zusammen mit A_4 (440 Hz) klingen. Beschränkt euch auf Töne, die maximal eine Oktave oberhalb oder unterhalb von A_4 liegen.

Die Pythagoräer beschrieben dieses Prinzip mit

Harmonische Tonintervalle stehen in kleinen ganzzahligen Verhältnissen.

Einigen dieser Tonintervalle gaben sie Namen:

Tonverhältnis	**Name**
1 : 2	Oktave
2 : 3	Quinte
3 : 4	Quarte
4 : 5	(große) Terz

2.1 Stimmungen

Wird nur eine Melodie gespielt und kann jede beliebige Tonhöhe erzeugt werden (z.B. Gesang), so können die oben genannten reinen Intervalle einfach nacheinander angestimmt werden.

Aufgabe 6 Eine Melodie wird folgendermaßen gespielt: Sie startet bei 440 Hz, geht nun eine Quinte nach oben, zwei Quarten nach unten, eine Quinte nach oben und abschließend eine Terz nach unten. Welche Frequenz hat der letzte Ton?

Reine Vokalmusik wird teilweise immer noch in diesen reinen Intervallen intoniert. Dass es dabei zu einer Drift des Ausgangtons kommt, ist hier nicht weiter schlimm. Mit auf feste Töne gestimmten Instrumenten ist dies jedoch nicht möglich.

Pythagoräische Stimmung Stellen wir uns vor, wir wollen ein Instrument mit festen Tonhöhen (z.B. Klavier) stimmen. Wir entscheiden uns zumindest die Quinte und die Oktave in der reinen Form zu behalten. Ausgehend von einem Grundton, sagen wir A, gehen wir nun immer in Quinten nach oben und Oktaven nach unten, so dass die resultierenden Töne in der Oktave oberhalb von A leigen.

Aufgabe 7 Dieser Prozess wird nie genau auf den Ausgangston A zurückkommen. Nach wie Vielen Schritten sind wir zumindest wieder nah an A dran und können den Prozess hier beenden.

So sah auch die Lösung der Pythagoräer aus, die *pythagoräische Stimmung*. Diese können wir uns in etwa so vorstellen:
Wir erzeugen 11 weitere Töne aus A (im Weiteren werden wir den Kammerton A_4 als Ausganspunkt verwenden). Gehe von A_4 eine Quinte nach oben (und ggf. eine Oktave nach unten, so dass der neue Ton zwischen A_4 und A_5 liegt). Wiederhole dies 5-mal. Gehe von A_4 eine Quinte nach unten (und ggf. eine Oktave nach oben, so dass der neue Ton zwischen A_4 und A_5 liegt). Wiederhole dies 6-mal. Die so erhaltenen Töne bezeichnen wir mit:

$$\mathsf{Es} - \mathsf{B} - \mathsf{F} - \mathsf{C} - \mathsf{G} - \mathsf{D} - \mathsf{A} - \mathsf{E} - \mathsf{H} - \mathsf{Fis} - \mathsf{Cis} - \mathsf{Gis}.$$

Aufgabe 8 Bestimme das Frequenzverhältnis von Gis zu Es.

Diese zu klein geratene Quinte “$\mathsf{Gis} - \mathsf{Es}$” heißt *Wolfsquinte*.

Um die sehr dissonant klingende Wolfsquinte loszuwerden wurden Stimmungen entwickelt, bei denen der Fehler statt auf eine Quinte, auf mehrere verteilt wurde. Zunächst wurden diese jedoch nicht gleichmäßig auf alle 12 Quinten verteilt. Einige der Quinten wurden Rein gelassen.

Lösungen

Lösung 1 Wir nummerieren die Töne, $c = 0$, $cis = 1, \dots, h = 11$ und rechnen modulo 12:

$$2 + 38 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Ton 4 ist das e.

Lösung 2 (a) $x = 30$ ist die einzige Lösung.

(b) $x = 40$ ist eine Lösung. Es gibt unendlich viele weitere der Form $x = n \cdot 35 + 5$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $x = 130$, ist eine von 5 Lösungen. Alle $x > 5$ mit $x \mid 130$ sind Lösungen.

Lösung 3 Wir bezeichnen die Frequenz eines Tones x mit $F(x)$, dann ist

$$F(A_0) = 2^{-4}F(A_4) = \frac{440}{16}\text{ Hz} = 27{,}5\text{ Hz}$$

$$F(A_7) = 2^3F(A_4) = 8 \cdot 440\text{ Hz} = 3520\text{ Hz}$$

Lösung 4 Die Anzahl der Oktaven ist der Logarithmus zur Basis 2 des Frequenzverhältnisses

$$\log_2\left(\frac{20.000}{20}\right) \approx 10.$$

Der Mensch kann also ca. 10 Oktaven hören.

Lösung 5 Einige Beispiele sind 220 Hz, $293\frac{1}{3}$ Hz, 330 Hz, 440 Hz, 528 Hz, 550 Hz, $586\frac{2}{3}$ Hz, 660 Hz, $733\frac{1}{3}$ Hz.
Töne können hier angehört/getestet werden:
https://onlinetonegenerator.com/multiple-tone-generator.html

Lösung 6 Das Frequenzverhältnis des letzten Tons zum ersten ist 81 : 80, seine Frequenz ist also 445,5 Hz.

Lösung 7 Es gibt natürlich verschiedene Antworten die in Frage kommen. Die beste Nährung unter den ersten 20 Tönen, ist der 12. Ton mit einer Frequenz von

$$440\text{Hz} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot 2^{-7} \approx 446\text{Hz}.$$

Das ist der Grund warum sich 12 Töne pro Oktabe etabliert haben.

Lösung 8 Das Frequenzverhältnis ist 177147 : 262144 ≈ 1,48. Dies ist die sogenannte *Wolfsquinte*.