SCHLESWIG-HOLSTEINS TAG DER MATHEMATIK

TEAMWETTBEWERB KLASSE 11/12

- **Erlaubte Hilfsmittel:** Nur Stifte, Zirkel und Lineal – keine elektronischen Geräte, keine Taschenrechner. Nutzung solcher Geräte kann zur Disqualifikation führen.
- **Lösungen:** Zu jeder Aufgabe sind Lösungswege/ Begründungen anzugeben, falls nicht explizit anders gefordert.
- **Papier:** Schmierpapier wird gestellt, für eure Lösungen ist Platz auf den Aufgabenblättern.
- **Abgabe:** Pro Aufgabe gebt bitte ein Blatt mit eurer Lösung und eurem Teamnamen ab. Nehmt dafür am besten das Aufgabenblatt selbst, notiert alternativ deutlich lesbar die Aufgabennummer auf dem abgegebenen Blatt. Jedes Blatt darf nur eine Aufgabe enthalten.
- **Teamarbeit:** Austausch im Team ist erlaubt, aber bitte einigermaßen leise, sonst hören die anderen ja eure guten Ideen. Leute außerhalb eures Team (Lehrkräfte, Leute aus anderen Teams, ...) dürfen euch nicht helfen.
- **Aufgabenkategorien:**
  - **Kreuzzahlrätsel:** Die erste Aufgabe ist ein Zahlen-Kreuzworträtsel; dieses ist eindeutig lösbar, es ist immer sehr hilfreich und manchmal auch nötig, mehrere Hinweise gleichzeitig zu betrachten.
  - **Drei Weitere Kategorien:** Danach gibt es drei Aufgaben-Kategorien, bestehend aus je drei Aufgaben. Ihr dürft zu jeder Aufgabe eine Lösung abgeben. **Nur die zwei besten Aufgaben in jeder Kategorie zählen für eure Endwertung!**
- **Joker-Regel:** Teams mit drei Mitgliedern dürfen einmal statt einer Lösung zu einer Aufgabe „**JOKER**“ schreiben und erhalten dann 6 Punkte für die Aufgabe. Teams aus zwei Personen (Oberstufenteams oder Teams, in denen kurzfristig Schüler:innen ausgefallen sind) erhalten einen zweiten solchen JOKER, dürfen diesen aber nicht in derselben Kategorie wie den ersten einsetzen.
- **Jury:** Am Ende entscheidet das *Mathe^{SH}-Team* von CAU und EUF unanfechtbar und engültig über Bepunktungen, Platzierungen und alle weiteren Regelfragen bezüglich des Wettbewerbs.

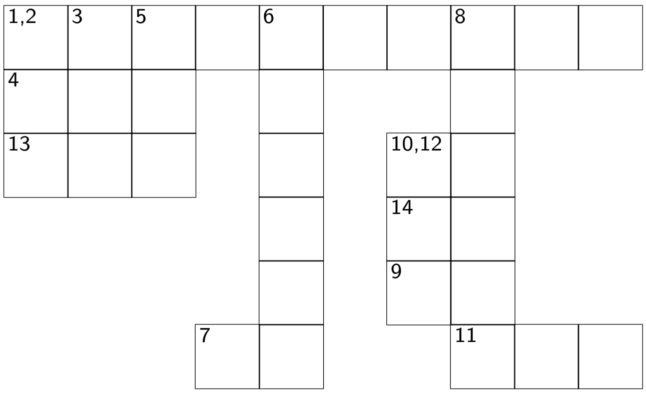
Date: 21. Juli 2025.

Teamname: ____________________

Aufgabe	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	Summe (gewerteter Punkte)
Erreichte Punkte											

1. Aufgabe: Vorsicht Kreuzung!

(12 Punkte) Füllt das Gitter anhand der Hinweise aus. Hier müssen keine Lösungswege oder Begründungen angegeben werden.



Horizontal

1 Berechnet schriftlich: $14\,666\,666\,664_8 : 12_8$ Die Zahlen sind im 8-er System angeben, das Ergebnis ist ebenfalls im 8-er System einzutragen.

4 $\sqrt{51\,076}$.

7 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{25\,600\,000\,000}} + \sqrt{\sqrt{16}}}$.

9 Die kleinste Primzahl p, für die $p+2$ weder Primzahl noch das Produkt zweier Primzahlen ist plus die kleinste natürliche Zahl q, für die weder $q-1$, noch q, noch $q+1$ eine Primzahl ist.

11 CCLXXXIX.

12 Die Einerziffer der gesuchten Zahl ist die Zehnerziffer von π^e, die Zehnerziffer der gesuchten Zahl die Zehnerziffer von e^π.

13 Diese Zahl ist durch 9 teilbar.

14 Wenn man die beiden Ziffern dieser Zahl im 11-er System nimmt, quadriert und die Quadrate dann addiert, erhält man die Zahl selbst. Einzutragen ist die Zahl im Dezimalsystem.

Vertikal

2 Die kleinste dreistellige durch 3 teilbare Zahl, die drei verschiedene, alle von der 0 verschiedene Ziffern hat.

3 Diese Zahl hat die drei Primteiler 2, 3 und 37 und ist weder durch 4 noch durch 9 teilbar.

5 Diese Zahl ist durch ihre Quersumme teilbar. Mit Quersumme ist die Summe der Ziffern gemeint.

6 Vierzig mal die Summe der ersten 100 positiven natürlichen Zahlen plus das Ergebis von Hinweis 3 .

8 Diese Zahl bleibt gleich, wenn man sie falsch herum liest.

10 Diese Zahl ist durch 25 teilbar und im Stellenwertsystem zur Basis 11 hätte sie eine 0 als letzte Ziffer.

Diagonal

42 Im gesamten Rätsel kommen insgesamt alle Ziffern außer einer gleich häufig vor.

2. Theoretisch folgen hier Zahlen

2.1. **Fakultäten.** (7 Punkte) Man bestimme alle Tripel (k, m, n) nichtnegativer ganzer Zahlen mit

$$k! + m! = n!$$

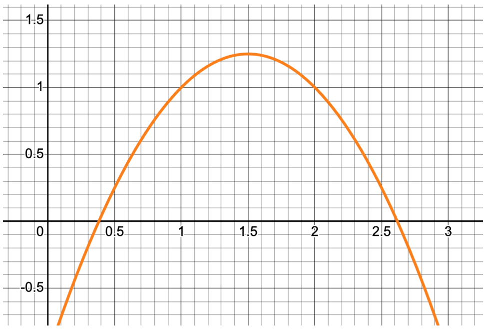
2.2. **Hilberts Business Hotel.** Hilberts Hotelkette hat am 31.05.2025 in Kiel ein neues Hotel eröffnet: Hilberts Business Hotel. Dort gibt es unendlich viele Zimmer, die mit den ganzen Zahlen durchnummeriert sind (also $..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$). Am Tag der Eröffnung stehen die meisten Zimmer leer, nur in Zimmer Nummer 0 zieht Mr. Smith, ein Agent der Firma 'Flatworms llc.' ein. Dieser hat die etwas merkwürdige Eigenschaft, sich jede Nacht in zwei neue Agent Smiths zu teilen, die morgens das Zimmer verlassen, und in die beiden benachbarten Zimmer umziehen (das ursprüngliche Zimmer ist dann leer). Die beiden neuen übernachten dann jeweils in ihrem neuen Zimmer, teilen sich in zwei und beide neuen Hälften gehen in die beiden benachbarten Zimmer. Wenn sich allerdings zwei dieser Agent-Smith-Klone in einem Zimmer begegnen, ~~löschen sie sich gegenseitig aus~~ verlassen beide gemeinsam glücklich und zufrieden das Hotel, kündigen bei Flatworms llc. und machen eine Cake-Pop-Bäckerei auf. Das geht jede Nacht unendlich lange so weiter.

(a) (2 Punkte) Ermittelt, wie viele Zimmer n Tage nach der Eröffnung maximal zwischen den Zimmern zweier Agenten sind.
(b) (2 Punkte) Ermittelt, wie viele Agenten heute morgen im Hotel waren.
(c) (2 Punkte) Die Firma 'Morpheus, Neo and Partners' ist der größte Konkurrent von Flatworm llc. Als sie heute morgen hört, dass die Flatworm-Mitarbeiter sich so schnell vermehren, beschließt sie, möglichst viele der Smith-Clone abzuwerben und aus dem Hotel zu holen. Leider ist nur Geld dafür da, zwei Klone abzuwerben. Wann sollte 'Morpheus, Neo and Partners' das tun? (Das ist natürlich nicht in der Vergangenheit, nur in der Zukunft möglich). Begründet eure Antwort.
(d) (2 Punkte) Ermittelt, wie viele Agenten (ohne Abwerbungen) in genau zwei Jahren, also am 21.07.2027, im Hotel sind.

2.3. Gib-mir-Fünf. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Vorschrift
$p(x) = -x^2 + 3x - 1$. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Nullstellen der Funktion sind

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

wobei die Zahl 5 unter der Wurzel die Diskriminante $3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$ der Funktion ist.



In dieser Aufgabe nennen wir eine quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine *High-Five*, wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt.

(U) Die Koeffizienten a, b und c sind ganze Zahlen, wobei der führende Koeffizient a negativ ist (sodass der Graph nach unten geöffnet ist).

(D) Die Diskriminante ist fünf, d. h. es gilt $b^2 - 4ac = 5$.

Zum Beispiel ist die obige Funktion mit $p(x) = -x^2 + 3x - 1$ eine High-Five, denn sie hat ganzzahlige Koeffizienten, ist nach unten geöffnet und hat die Diskriminante 5.

(a) (2 Punkte) Gebt eine weitere High-Five an.

(b) (2 Punkte) Wie man leicht nachrechnet, gilt $p(1) = 1 > 0$. Es gibt noch genau eine weitere High-Five q, die an der Stelle 1 einen positiven Wert annimmt. Findet q und berechnet $p(1) + q(1)$.

(c) (2 Punkte) Es gibt genau zwei verschiedene High-Fives g und h, die an der Stelle $x = 2025$ positive Werte $g(2025) > 0$ und $h(2025) > 0$ annehmen. Gebt g und h sowie die Summe $g(2025) + h(2025)$ an.

(d) (2 Punkte) Es gibt genau vier verschiedene High-Fives f_1, f_2, f_3, f_4, die an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ positive Werte annehmen. Gebt die vier Funktionen an und berechnet die Summe $f_1(\frac{1}{2}) + f_2(\frac{1}{2}) + f_3(\frac{1}{2}) + f_4(\frac{1}{2})$.

(e) (2 Punkte) Nun sei $x \in \mathbb{Q}^+$ eine beliebige positive rationale Zahl. Zeigt, dass es nur endlich viele High-Fives gibt, die an der Stelle x positive Werte annehmen. Zeigt außerdem, dass die Summe all dieser Funktionswerte gleich 2 ist.

In Formeln:

$$\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{Z} \\ a<0 \\ b^2-4ac=5 \\ 0<ax^2+bx+c}} ax^2 + bx + c = 2.$$

3. Kombinatorik Spiele und Co.

3.1. **Zauberbaum.** An einem magischen Baum hängen 25 reife Äpfel und 25 reife Bananen. Man kann diese Früchte pflücken, jedoch immer nur genau zwei auf einmal. Wenn man zwei Früchte derselben Art pflückt, wächst sofort ein reifer Apfel nach. Wenn man einen Apfel und eine Banane gemeinsam pflückt, wächst sofort eine reife Banane nach.

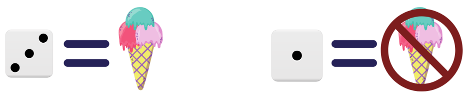
(a) (3 Punkte) Findet heraus, wie viele Früchte übrigbleiben, wenn man so lange immer wieder Früchte pflückt, wie man kann.

(b) (2 Punkte) Bestimmt, welche Früchteart am Baum übrig bleibt, wenn man so lange Früchte pflückt, bis man nicht mehr weiter pflücken kann.

(c) (2 Punkte) Bleibt die übrigbleibende Frucht gleich, wenn man die Startzahlen ändert? Begründet eure Antwort!

3.2. **EIS.**

(a) (5 Punkte) Beim $Mathe^{SH}$ Herbstcamp in Westensee schlägt dir Jana folgendes Spiel vor: Du würfelst einmal mit einem fairen, sechsseitigen Würfel. Nach dem Wurf kannst du dich entscheiden: Entweder bekommst du x Eiskugeln, wobei x die Zahl ist, die du gerade gewürfelt hast, und dann endet das Spiel für dich oder du bekommst nichts, aber würfelst noch einmal. Beim zweiten Wurf bekommst du dann x Eiskugeln, wobei x die Zahl ist, die du in Wurf 2 gewürfelt hast. Bei beiden Würfen gibt es aber eine Sonderregel: Wenn du (egal in welchem Wurf) eine 1 würfelst, ist das Spiel sofort vorbei und du bekommst nichts. Bestimmt eine optimale Strategie für das Spiel! Optimal bedeutet hier, dass du im Mittel möglichst viele Eiskugeln bekommt.



(b) (4 Punkte) Kurt bietet dir folgende Variante des Spiels an, bei der er möglicherweise deutlich öfter als zwei Mal würfelt: Du würfelst einmal mit einem fairen, sechsseitigen Würfel. Nach dem Wurf kannst du dich entscheiden: Entweder bekommst du x Eiskugeln, wobei x die Zahl ist, die du gerade gewürfelt hast, und dann endet das Spiel für dich oder du bekommst nichts, aber würfelst noch einmal. Beim nächsten Wurf hast du wieder dieselben Optionen: Entweder bekommst du x Eiskugeln, wobei x die Zahl ist, die du gerade gewürfelt hast, und dann endet das Spiel für dich oder du bekommst nichts, aber würfelst noch einmal.

Das geht immer so weiter, bis du einmal den Würfelwert als Eiskugeln nimmst und das Spiel endet, ODER - auch hier gibt es diese Zusatzregel - wenn irgendwann eine Eins geworfen wird. Dann endet das Spiel sofort und du bekommst nichts. Bestimmt eine optimale (d.h. deinen mittleren Gewinn in Eiskugeln maximierende) Strategie.

3.3. **Swahili: Nach einer Linguistikolympiadenaufgabe von Nilai Sarda:** Folgende Swahili-Phrasen und ihre englischen Übersetzungen stehen in zufälliger Reihenfolge:

(1)	*jumamosi, saa moja usiku*	A.	Sunday, 1.00 AM
(2)	*jumapili, saa tatu na robu asubuhi*	B.	Sunday, 7.30 AM
(3)	*jumamosi, saa saba usiku*	C.	Sunday, 9.15 AM
(4)	*jumamosi, saa mbili na robu usiku*	D.	Tuesday, 12.15 PM
(5)	*jumanne, saa tano na nusu usiku*	E.	Tuesday, 11.30 PM
(6)	*jumanne, saa sita na robu asubuhi*	F.	Saturday, 10.30 AM
(7)	*jumamosi, saa nne na nusu asubuhi*	G.	Saturday, 7.00 PM
(8)	*jumapili, saa moja na nusu asubuhi*	H.	Saturday, 8.15 PM

(a) (6 Punkte)
Gebt die korrekten Zuordnungen ohne Begründung im Format 1-B, 2-H,... an.

(b) (2 Punkte)
Übersetzt ins Englische:

1. *jumatano, saa moja na robu asubuhi*

2. *jumapili, saa nne na nusu asubuhi*

4. Funktionen und Geometrie

4.1. **Wer ist größer: Produkt oder Summe?** Mia lässt sich von einem Zufallsgenerator zwei reelle Zahlen x und y aus dem Intervall $x, y \in [0, 5]$ erzeugen. Sie interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der beiden Zahlen größer als die Summe der beiden Zahlen ist.

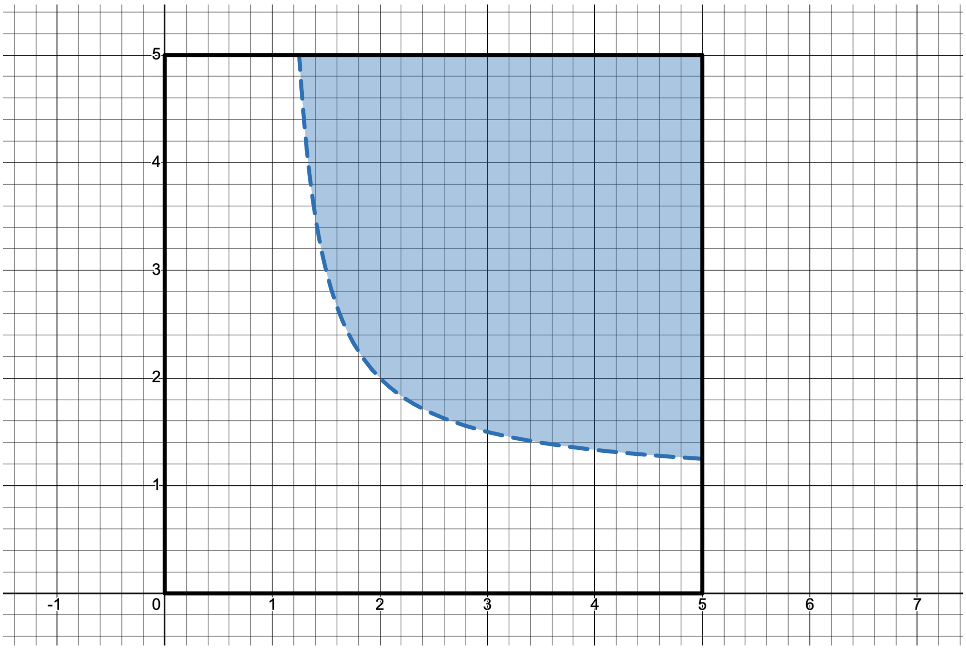
(a) (1 Punkt) Angenommen, Mia erhält die Zahlen $x = 3{,}4$ und $y = 2{,}0$. Beurteilt, ob das Produkt $x \cdot y$ größer als die Summe $x + y$ ist.

(b) (3 Punkte) Zeigt, dass für einen Punkt $\binom{x}{y} \in [0, 5] \times [0, 5]$ gilt: $x \cdot y = x + y \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$.

Eine sinnhafte Definition für Mias Wahrscheinlichkeit lautet

$$p = \frac{\mathrm{A}(M)}{\mathrm{A}(Q)};$$

hierbei ist $Q = [0, 5] \times [0, 5]$ das Quadrat, das aus allen Punkten der Form $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ besteht, für die $0 \leq x, y \leq 5$ gilt, und $M \subseteq Q$ die Teilmenge aller Punkte $\binom{x}{y} \in Q$, für die zusätzlich $x \cdot y > x + y$ gilt. Ferner gibt A den Flächeninhalt einer Fläche an.



(c) (5 Punkte) Kreuzt die beste der drei Näherungen an und begründet eure Wahl, indem ihr die Flächen ausreichend genau abschätzt!

☐ $p \approx 40\%$ ☐ $p \approx 50\%$ ☐ $p \approx 60\%$

4.2. **Die Durchschnittsaufgabe.** Es sei $F\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ferner sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Ableitung mit $f(t) = F'(t)$ und $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Durchschnittswertfunktion mit $g(t) = F(t)/t$.

Wir betrachten die Aussage:

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = g(t).$$

(a) (4 Punkte) Man beweise die Aussage formal mithilfe der Quotienten- oder der Produktregel.

(b) (4 Punkte) Man erkläre die Aussage anschaulich.

4.3. **Im Alten Äqypten.** (8 Punkte) Eine Schnittebene teile die Kanten einer dreiseitigen Pyramide (genauer: eines nicht notwendigerweise gleichseitigen Tetraeders) so, dass jeweils ein Anteil von p_1 der ersten Kante, ein Anteil von p_2 der zweiten Kante und ein Anteil p_3 der dritten Kante oberhalb der Ebene liegt. Bestimmt, welcher Anteil des Volumens der Pyramide oberhalb der Ebene liegt.