SCHLESWIG-HOLSTEINS TAG DER MATHEMATIK

TEAMWETTBEWERB KLASSE 9/10

- **Erlaubte Hilfsmittel:** Nur Stifte, Zirkel und Lineal – keine elektronischen Geräte, keine Taschenrechner. Nutzung solcher Geräte kann zur Disqualifikation führen.
- **Lösungen:** Zu jeder Aufgabe sind Lösungswege/ Begründungen anzugeben, falls nicht explizit anders gefordert.
- **Papier:** Schmierpapier wird gestellt, für eure Lösungen ist Platz auf den Aufgabenblättern.
- **Abgabe:** Pro Aufgabe gebt bitte ein Blatt mit eurer Lösung und eurem Teamnamen ab. Nehmt dafür am besten das Aufgabenblatt selbst, notiert alternativ deutlich lesbar die Aufgabennummer auf dem abgegebenen Blatt. Jedes Blatt darf nur eine Aufgabe enthalten.
- **Teamarbeit:** Austausch im Team ist erlaubt, aber bitte einigermaßen leise, sonst hören die anderen ja eure guten Ideen. Leute außerhalb eures Team (Lehrkräfte, Leute aus anderen Teams, ...) dürfen euch nicht helfen.
- **Aufgabenkategorien:**
  - **Kreuzzahlrätsel:** Die erste Aufgabe ist ein Zahlen-Kreuzworträtsel; dieses ist eindeutig lösbar, es ist immer sehr hilfreich und manchmal auch nötig, mehrere Hinweise gleichzeitig zu betrachten.
  - **Drei Weitere Kategorien:** Danach gibt es drei Aufgaben-Kategorien, bestehend aus je drei Aufgaben. Ihr dürft zu jeder Aufgabe eine Lösung abgeben. **Nur die zwei besten Aufgaben in jeder Kategorie zählen für eure Endwertung!**
- **Joker-Regel:** Teams mit drei Mitgliedern dürfen einmal statt einer Lösung zu einer Aufgabe „**JOKER**“ schreiben und erhalten dann 6 Punkte für die Aufgabe. Teams aus zwei Personen (Oberstufenteams oder Teams, in denen kurzfristig Schüler:innen ausgefallen sind) erhalten einen zweiten solchen JOKER, dürfen diesen aber nicht in derselben Kategorie wie den ersten einsetzen.
- **Jury:** Am Ende entscheidet das *Mathe^{SH}-Team* von CAU und EUF unanfechtbar und engültig über Bepunktungen, Platzierungen und alle weiteren Regelfragen bezüglich des Wettbewerbs.

Date: 21. Juli 2025.

Teamname: ____________________________

Aufgabe	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	Summe (gewerteter Punkte)
Erreichte Punkte											

1. Vorsicht Kreuzung!

(12 Punkte) Füllt das Gitter anhand der Hinweise aus. Hier müssen keine Lösungswege oder Begründungen angegeben werden.

1,7	8	9	10	11
2				
3		■	6	
4		12		
5				

Horizontal

1 Schreibt die natürlichen Zahlen (beginnend mit der 1) hintereinander (Basis 10). Nehmt die 18. bis 22. Ziffer der so entstandenen Zahl.

2 $\frac{(6!)^2}{2^4} - 11$. Dabei ist $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot ... \cdot 1$.

3 Summe aller natürlichen Zahlen $n \leq 16$, die mindestens 3 Teiler haben.

4 Sei p die einzige 5-stellige Primzahl mit um genau 1 absteigenden Ziffern. Berechne $p - 277$.

5 Sei p die größte 5-stellige Primzahl mit ausschließlich verschiedenen nicht primen Ziffern. Berechne $p - 106$.

6 Die Antwort auf alles.

Vertikal

7 Übertragt die Zahl $84bb_{16}$ aus dem 16er-System ins Zehnersystem.

8 Übertragt die Summe $111_{111} + 55_6$ ins Zehnersystem.

9 Die 14. Primzahl.

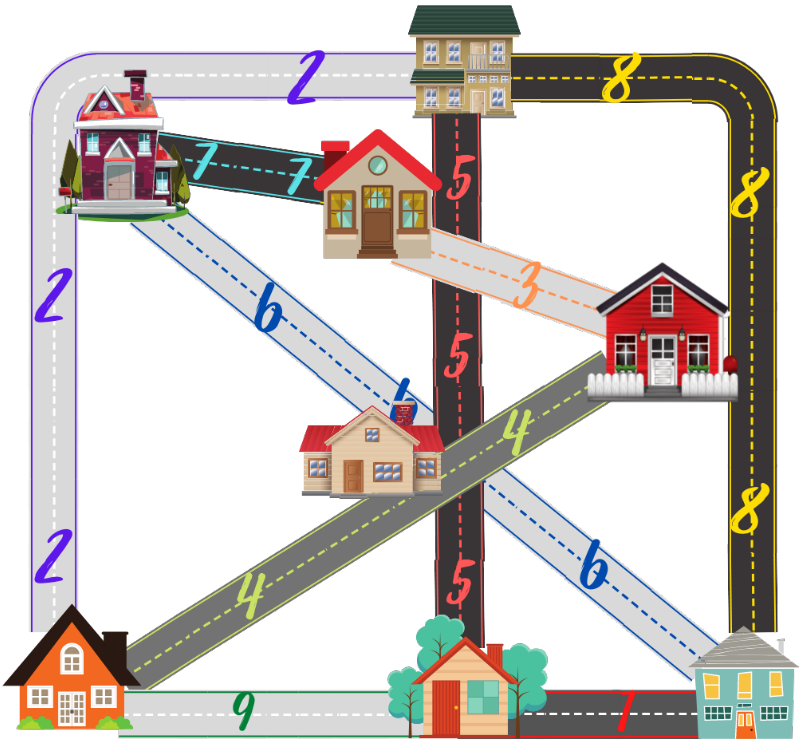
10 Die kleinste Zahl m mit $m \equiv 1 \mod 2$, $m \equiv 1 \mod 3$, $m \equiv 3 \mod 5$, $m \equiv 4 \mod 7$, $m \equiv 5 \mod 11$, $m \equiv 3 \mod 13$. Hierbei bedeutet $m \equiv r \mod t$, dass m beim Teilen durch t den Rest r lässt.

11 $3^3 \cdot 13^3 - 3^3 \cdot 2$.

12 Eine Quadratzahl.

2. Kombinatorik, logik und Spiele

2.1. **Strategie.** (7 Punkte) Alan und Emmy spielen ein Spiel. Dabei geht es um ein Dorf, in dem acht Häuser mit neun von 1 bis 9 durchnummerierten Straßen verbunden sind. Abwechselnd dürfen Alan und Emmy jeweils eine Straße wählen. Diese ist dann fest im Besitz der jeweiligen Spieler:in und darf von dem oder der anderen nicht mehr gewählt werden. Wer zuerst drei Straßen in Besitz hat, die dasselbe Haus berühren, hat gewonnen.



Alan fängt an. Gibt es für ihn oder Emmy eine Strategie zu gewinnen, wenn der oder die andere perfekt spielt? Begründet eure Antwort (Unten findet ihr einen Hinweis)[1].

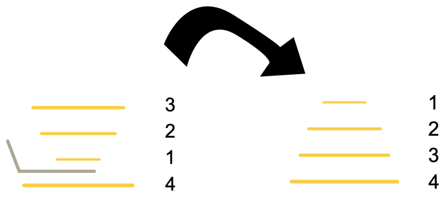
[1]Ihr dürft verwenden, dass das Spiel *Tic Tac Toe (AKA X und O)* bei perfektem Spiel ein unentschieden ist.

2.2. **Auf dem Jahrmarkt.** Auf dem Jahrmarkt gibt es ein neues Gewinnspiel. Auf einer großen Wand sind leuchtende Lampen angebracht, nummeriert von 1 bis 999. Zu Beginn sind alle Lampen aus und du wählst eine Zahl. Danach gehen die Lampen wild an und aus. Wenn die Lampe mit deiner Zahl am Ende noch leuchtet, gewinnst du etwas. Je größer die Zahl, desto besser die Gewinne, aber die großen Zahlen scheinen am Ende auch öfter aus zu sein.
Maryam beobachtet das Spiel lange und erkennt, dass die Lampen gar nicht zufällig an- und ausgehen, sondern immer dem gleichen Muster folgen:

(1) Im ersten Schritt geht jede Lampe an.
(2) Im zweiten Schritt geht jede zweite Lampe aus.
(3) In der nächsten Runde ändert jede dritte Lampe ihren Zustand: Wenn sie an ist, geht sie aus, und, wenn sie aus ist, geht sie an.
(4) Danach ändert jede vierte ihren Zustand,
(5) dann jede fünfte,
(...) usw. ...
(999) bis im letzten Durchgang nur die 999. ihren Zustand ändert.

(a) (2 Punkte) Ermittelt, ob die 24. Lampe am Ende aus oder an ist.
(b) (2 Punkte) Ermittelt, welche Zahl Maryam wählen sollte, um den bestmöglichen Gewinn zu bekommen.
(c) (2 Punkte) Bestimmt, wie viele Lampen am Ende an sind.
(d) (2 Punkte) Der Betreiber des Gewinnspiels möchte das An- und Ausschalten der Lampen beschleunigen. Deshalb wird nicht mehr für jede Zahl $1 \leq n \leq 999$ jede n-te Lampe an- bzw. ausgeschaltet, sondern sie werden nur noch in der ersten Runde einmal angeschaltet und ändern danach nur noch für jede Primzahl $1 \leq p \leq 999$ wie oben beschrieben ihren Zustand.
Begründet in diesem Fall kurz, welche Zahl Maryam wählen sollte.

2.3. **Die Pfannkuchennummer:** Stellt euch vor, ihr macht eurer Familie $n \in \mathbb{N}$ Pfannkuchen. Leider geraten diese nicht ganz gleichgroß. Dann möchte man doch zumindest, dass die Pfannkuchen der Größe nach geordnet auf dem Teller liegen, wie im ersten Beispiel rechts. Meistens jedoch ist das, wenn man die Pfannkuchen einfach irgendwie auf einen Teller legt, nicht so, wie z.B. rechts unten. In dem Fall ist es unsere Aufgabe, die Pfannkuchen so umzusortieren, dass sie wie auf dem oberen Bild liegen. Dazu dürfen wir aber nicht einfach alle irgendwie neu anordnen. Das einzige, was wir immer wieder machen dürfen, ist mit dem Pfannenwender in den Stapel zwischen zwei beliebige Pfannkuchen hineinzustechen und alles, was über dem Pfannenwender ist umgedreht wieder auf den Stapel zu legen. Zum Beispiel so:



Die *Pfannkuchennummer von n* ist die kleinstmögliche Zahl von solchen Pfannenwender-Umdrehaktionen, die man benötigt, um einen Stapel mit n Pfannkuchen in die richtige Reihenfolge zu bringen, wenn der Stapel maximal unglücklich durcheinandergebracht ist.

(a) (6 Punkte) Bestimmt Pfannkuchennummern für $1, 2, 3$ und 4.

(b) (2 Punkte) Irgendwann wird es euch nicht mehr gelingen, die genauen Pfannkuchennummern für bestimmte $n \in \mathbb{N}$ zu ermitteln. (Bisher haben es Mathematiker:innen nur bis 19 geschafft.[2]) Zeigt, dass die Pfannkuchennummer von 19 mindestens 19 und höchstens 35 ist.

[2]siehe: https://oeis.org/A058986 . Das Problem wurde zuerst von Jacob E. Goodman, unter dem Pseudonym 'Harry Dweighter' ('harried waiter') veröffentlicht. Und neben einigen berühmten Mathematikern und Informatikern haben u.a. Bill Gates und Simpsons- und Futurama-Autor David X. Cohen wissenschaftliche Paper zu dem Problem mitveröffentlicht.

3. Rechnen und Gleichungen

3.1. **Nullen.**

(a) (3 Punkte) Begründet, auf wie viele Nullen die Zahl $2025! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2025$ endet, wenn man sie im 8ter-System schreibt.

(b) (3 Punkte) Die Funktion $f_8(n)$ gibt die Anzahl der Nullen am Ende von $n!$ im 8-ter System aus, z.B. ist $f_8(1) = 0$, $f_8(4) = 1$ und $f_8(2025)$ die Antwort auf Teil (a).

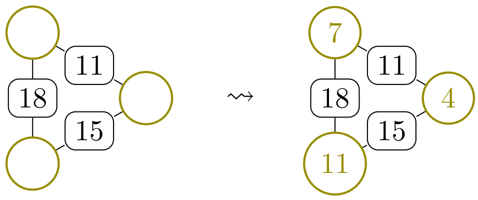
(b_1) Gebt den maximalen Bereich an, auf dem f_8 konstant ist.

(b_2) Gebt eine allgemeine Funktionsgleichung für f_8 an.

(c) (2 Punkte) Gebt die letzten 2 Ziffern im Dezimalsystem von 2025^{217} an.

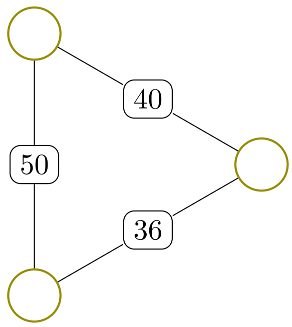
3.2. **Arithmagons.** Ein *Arithmagon* ist ein Rätsel, bei dem ein Vieleck vorgegeben ist. In die Ecken des Vielecks sollen Zahlen eingetragen werden, sodass die Summe benachbarter Ecken gleich der Zahl auf der Seitenlinie ist.

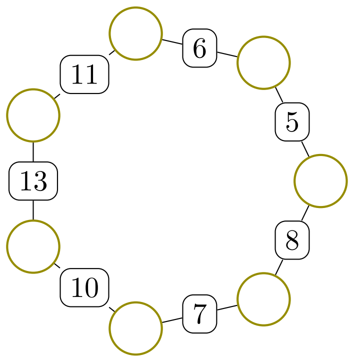
Zum Beispiel hat das abgebildete Arithmagon die abgebildete Lösung, da die Gleichungen $4+7=11$, $7+11=18$ und $11+4=15$ gelten.



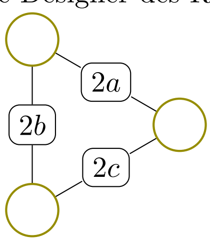
Das Wort Arithmagon ist ein Kofferwort aus den Wörtern *Arithmetik* und *Polygon*, den griechischen Fremdwörtern für Zahlentheorie und Vieleck.

(a) (4 Punkte) Tragt (ohne Begründung) eine Lösung für das Dreieck und eine Lösung für das Siebeneck in die Formen ein.

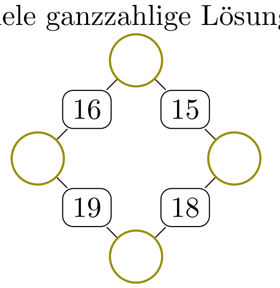




(b) (2 Punkte) Begründet, warum das abgebildete Arithmagon mit drei Ecken immer eine eindeutige ganzzahlige Lösung hat (egal welche ganzzahligen Werte für a, b und c sich die Designer des Rätsels ausgedacht haben).



(c) (2 Punkte) Begründet, warum das abgebildete Arithmagon mit vier Ecken unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt.



3.3. **Wambon: Nach einer Linguistikolympiadenaufgabe von Alexander Piperski:** Wanbon ist eine in der indonesischen Region Papua gesprochene Sprache mit einem spannenden Zahlsystem. Im Folgenden ist das 'kleine 1×3' also

$$3 \times 1 = 3, \quad 3 \times 2 = 6, \quad \ldots, \quad 3 \times 9 = 27.$$

in zufälliger Reihenfolge auf Wambon angegeben:

$$\textit{takhem} \times \textit{ambalop} = \textit{emkelop}, \qquad \textit{takhem} \times \textit{muyop} = \textit{emhitulop},$$

$$\textit{takhem} \times \textit{hitulop} = \textit{silutop}, \qquad \textit{takhem} \times \textit{sanop} = \textit{takhem},$$

$$\textit{takhem} \times \textit{javet} = \textit{emsanop}, \qquad \textit{takhem} \times \textit{sanopkunip} = \textit{kumuk},$$

$$\textit{takhem} \times \textit{kumuk} = \textit{emalin}, \qquad \textit{takhem} \times \textit{takhem} = \textit{javet},$$

$$\textit{takhem} \times \textit{mben} = \textit{emben}.$$

(a) (6 Punkte) Ordnet den Gleichungen ihr Äquivalent in Ziffern zu. Es reicht, die Gleichungen in arabischen Zahlen über die in Wambon zu schreiben, Begründungen sind hier nicht nötig.

(b) (3 Punkte) Schreibt in Ziffern (keine Begründung nötig):

$$(\textit{emnggokmit} + \textit{nggokmit}) \div \textit{sanopkunip} = \textit{kalit}, \qquad \textit{emambalop} - \textit{emjavet} = \textit{hitulop}.$$

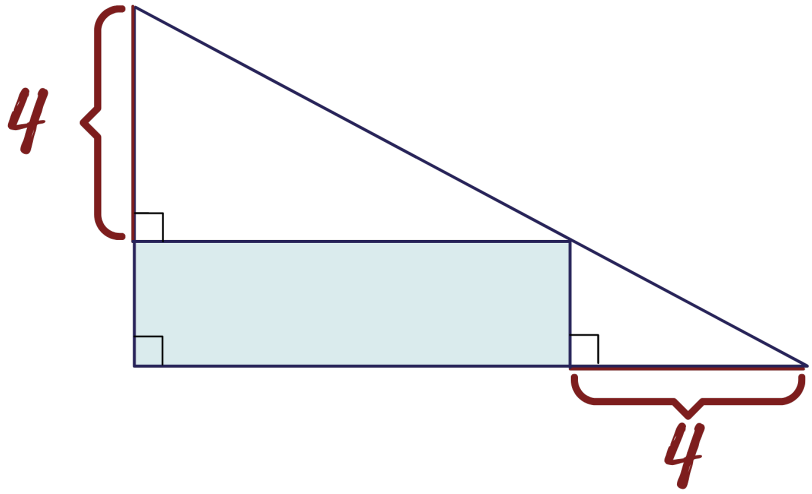
4. Ungeometrische Geometrie

4.1. **Dreiecke.**

(a) (4 Punkte) Konstruiert ein Dreieck und zerlegt es in 9 kongruente Teildreiecke.

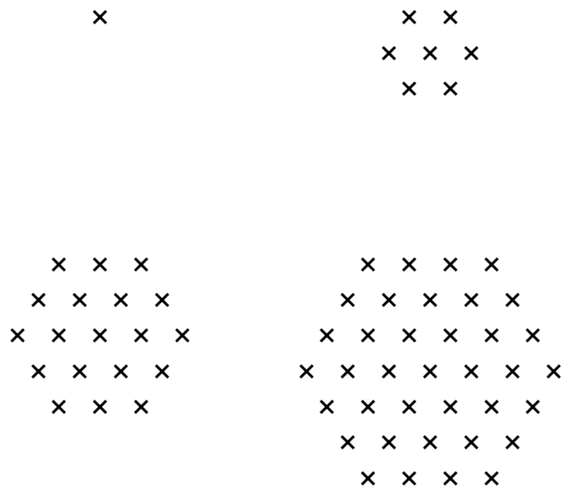
(b) (5 Punkte) Gibt es ein Dreieck, das man in 170 kongruente Teildreiecke zerlegen kann? Begründet eure Antwort!

4.2. **Noch mehr Dreiecke.**



(1) (5 Punkte) Berechnet den Flächeninhalt des hellblauen, in dem Dreieck liegenden Rechteckes.
(2) (3 Punkte) Bestimmt den minimal möglichen Wert für den Flächeninhalt des großen Dreieckes.

4.3. **Nicht noch mehr Dreiecke!** Hier seht ihr regelmäßige Sechsecke aus Punkten. Das erste hat eine Kantenlänge von einem Punkt, das zweite von zwei Punkten, das dritte von drei Punkten usw. Dieses Muster soll nun fortgesetzt werden: Allgemein wird das $n-te$ Sechseck so gebildet, dass mit n Punkten in einer Reihe begonnen wird, drüber befinden sich schräg versetzt $n+1$ Punkte. Nach der n-ten Reihe werden $n-1$ weitere Reihen angelegt, die immer einen Punkt weniger als die Vorherige haben.



(a) (3 Punkte) Bestimmt die Anzahl von Punkten im 5. Sechseck.
(b) (3 Punkte) Bestimmt die Anzahl von Punkten im 8. Sechseck.
(c) (2 Punkte) Bestimmt die Anzahl von Punkten im 42. Sechseck.