Schuljahr 2024/25
Angewandte Mathematik

1 Knobelaufgaben

Aufgabe 1 Ordne die Zahlen von 1 bis 16 so, dass die Summe von je zwei benachbarten zahlen eine Quadratzahl ergibt.

Aufgabe 2 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine solche Anordnung der Zahlen 1 bis n?

Aufgabe 3 Tobias und Simon planen den Tag der Mathematik. Es gibt drei Zeitslots für (parallele) Vorträge am Nachmittag. Geplant sind Graphetheorie 1, Graphentheorie 2, Algebra 1, Algebra 2, KI, Kryptographie und Musik. Tobias unterrichtet Algebra und KI, Simon Graphenteorie und Musik. Graphentheorie und Kryptographie sollen im größten Hörsaal stattfinden. Für Kryptographie und Musik wird der einzige Beamer benötigt.
Ist es möglich das Programm so zu planen?

Aufgabe 4 Joela läd zu einer Party ein und möchte Cliquenbildung vermeiden. D.h. sie möchte, dass sich auf der Party keine 3 Personen befinden, die sich alle untereinander kennen, und keine 3 Personen, die sich alle untereinander nicht kennen. Wie viele Menschen kann sie maximal einladen?

2 Einige Begriffe der Graphentheorie

Definition 1 (Graph) *Ein Graph* G *ist ein geordnetes Paar* (V, E)*, wobei* V *eine Menge von "Ecken" (engl. vertex/vertices, dt auch Knoten) und* E *eine Menge von "Kanten" (engl. edges), bezeichnet. Graphen werden manchmal nach der Art der Kanten unterschieden. Z.B.*

- E *besteht aus ungeordneten Paaren* $(v_1, v_2) \to$ ungerichteter Graph
- $E \subset V \times V \to$ gerichteter Graph
- *Mehrfachkanten möglich, z.B.* $E : V \times V \to \mathbb{N} \to$ gerichteter Graph mit Mehrfachkanten

Ecken heißen benachbart*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.*

Definition 2 (Weg) *Eine Folge von benachbarten Ecken heißt* Weg.

- *Ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält heißt* Eulerweg *(auch Eulertour).*
- *Ein Weg, der jede Ecke genau einmal enthält heißt* Hamilton-Weg.
- *Ein Weg, der an seinem Startpunkt endet, heißt* Kreis*. Entsprechend sprechen wir von* Eulerkreis *und* Hamiton-Kreis.

Die Frage, ob ein Graph einen Eulerweg besitzt ist vor allem bekannt durch das Königsberger Brückenproblem. Die Frage ist einfach anhand der Grade der Knoten (anzahl der Kanten am Knoten) zu beantworten.
Die Frage ob ein Graph einen Hamilton-Weg besitzt ist hingegen im Allgemeinen schwierig und ein NP-vollständiges Problem.

Definition 3 (Färbung)

- *Eine* Ecken-Färbung *ordnet den Ecken eines Graphen* G *Farben zu, üblicherweise beschreiben als Funktion* $f : V \to \mathbb{N}$*. Eine Färbung heißt* zulässig*, wenn keine zwei Ecken gleicher Farbe benachbart sind. Die kleinste Anzahl an Farben, mit der ein Graph* G *zulässig eingefärbt werden kann, nennt sich* chromatische Zahl *von* G*. Wir schreiben dies als* $\chi(G)$*.*
- *Eine* Kanten-Färbung *ordnet den Kanten von* G *Farben zu,* $f : E \to \mathbb{N}$*.*

Sehr viele unterschiedliche mathematische Probleme lassen sich als Graphen-Färbungs-Probleme Formulieren. Das wahrscheinlich bekannteste ist der *4 Farbensatz*.

Satz 1 (Vier-Farben-Satz) *Jede beliebige Landkarte in der euklidischen Ebene kann so mit 4 Farbeneingefärbt werden, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe bekommen.*

In der Sprache der Graphentheorie:
Die chromatische Zahl eines planaren Graphen G *ist maximal 4, also*

$$\chi(G) \leqslant 4.$$

3 Lösungsansätze

Lösung 1 Eine Lösung kann leicht gefunden werden, indem das Problem als Graph G dargestellt wird. Die Zahlen 1 bis 16 bilden die Knoten. Diese sind genau dann benachbart, wenn ihre Summe eine Quadratzahl ist. Die Aufgabe ist nun einen *Hamilton-Weg* in G zu finden. Eine (von 2) Lösung ist

$$16\ 9\ 7\ 2\ 14\ 11\ 5\ 4\ 12\ 13\ 3\ 6\ 10\ 15\ 1\ 8.$$

Lösung 2 Auf ähnlicher Art lässt sich zeigen, dass es eine solche Anordnung für

$$n = 15, 16, 17, 23, 25$$

existiert.
2018 Wurde gezeigt, dass dies auch für alle $n > 25$ gilt. Die Liste findet sich in der OEIS A090461.

Lösung 3 Seien die Veranstaltungen die Ecken eines Graphen G und diese Benachbart, wenn sie nicht gleichzeitig stattfinden können. Wir teilen den Zeitslots nun Farben zu und versuchen die Ecken des Graphen damit einzufärben. In der Sprache der Graphentheorie ist die Frage nun:
gibt es eine zulässige 3-Färbung von G? Die Antwort ist *nein*. Es gibt aber eine 4-Färbung.

Lösung 4 Die Antwort ist: Joela kann maximal 5 Leute einladen. Ab 6 Gästen existiert immer so eine 3-er Gruppe. Die Aufgabe kann ebenfalls als Graphen-Fäbungs-Problem (Kantenfäbung) formuliert werden. Sie ist ein Spezialfall des Satz von Ramsey. Auf Wikipedia findet sich eine detaillierte Lösung der aufgabe. Das Bild zeigt alle möglichen Gruppenkonstellationen bei 6 Personen (Blaue kanten kennen sich, rote nicht).