

Spieletheorie

Silas Rathke

Aufgabe 1 (381031). Roxana und Annika spielen das folgende Spiel:

Auf dem Tisch liegen 1999 Spielsteine, von denen Roxana und Annika abwechselnd Steine wegnehmen. Roxana muss 2, 4, 6, 8 oder 10 Steine in einem Zug wegnehmen, Annika 1, 3, 5, 7 oder 9 Steine. Wer den letzten Stein weggenommen hat, hat gewonnen.

Man beweise, dass Roxana, wenn sie das Spiel beginnt, stets so spielen kann, dass sie das Spiel gewinnt.

Aufgabe 2 (421034). Victor und Thymoteus spielen „Diagonalix“ mit einem 2003-Eck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen: Victor und Thymoteus zeichnen abwechselnd Diagonalen, d. h. Verbindungsstrecken zwischen zwei nicht benachbarten Eckpunkten, ein. Keine neue Diagonale darf eine vorhandene in einem inneren Punkt schneiden. Gewonnen hat, wer die letzte erlaubte Strecke zeichnet, Victor beginnt.

Kann ein Spieler den Sieg erzwingen?

Aufgabe 3 (481041). Daphne und Alan spielen das folgende Spiel: Von einem Stapel mit 100 Karten ziehen sie abwechselnd entweder 2, 5 oder 6 Karten. Den ersten Zug führt stets Daphne aus. Gewonnen hat, wer den letzten erlaubten Zug machen kann.

Untersuchen Sie, wer von den beiden den Sieg erzwingen kann und geben Sie eine Gewinnstrategie an.

Aufgabe 4 (261235). Zwei Personen, Melvin und Lukas, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:

Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n - 1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, dass die Spieler, mit Melvin beginnend, abwechselnd am Zuge sind:

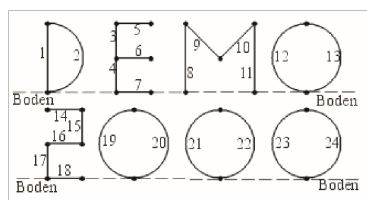
Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k . Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet. Man beweise, daß Melvin für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 5 (431332). Hannah und Pauline spielen das Streckenspiel. Dieses Spiel wird mit 64 in einem Quadratgitter angeordneten Punkten gespielt. Hannah beginnt das Spiel, indem sie zwei senkrecht oder waagerecht unmittelbar benachbarte Punkte verbindet.

Im weiteren Spielverlauf besteht ein Zug darin, den bestehenden Streckenzug um eine Strecke zu erweitern, indem einer der beiden Endpunkte wiederum mit einem senkrecht oder waagerecht unmittelbar benachbarten Punkt verbunden wird. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass man nicht zu einem Punkt ziehen darf, der bereits im Streckenzug enthalten ist. Verloren hat diejenige, die keinen Zug mehr machen kann.

Kann eine der Spielerinnen den Gewinn erzwingen? Wenn ja, gebe man eine Strategie an, die mit Sicherheit zum Sieg führt.

Aufgabe 6 (391335). Paul M. und Paul S. spielen „Hackenbush“, ein Spiel, bei dem zwei Spieler abwechselnd Kanten aus einem vorgegebenen Kantengerüst entfernen. Der Spieler, der am Zug ist, entfernt dabei zunächst genau eine Kante; falls dabei andere Kanten die Verbindung zum Boden verlieren, so werden auch sie entfernt. Danach ist der andere Spieler am Zug. Gewinner ist, wer die letzte(n) Kante(n) entfernt. Paul M. und Paul S. spielen Hackenbush mit dem DEMO-2000-Kantengerüst, wobei Paul M. beginnt. Wer von beiden kann den Sieg erzwingen?



Aufgabe 7 (491336). Linus und Julian spielen mit Kastanien. Dazu füllen sie drei Schalen mit Kastanien. Deren Anzahlen seien n_1 , n_2 und n_3 . Beide Spieler wechseln sich in den Zügen ab. Linus beginnt.

Derjenige Spieler, der am Zug ist, leert eine beliebige Schale und füllt die geleerte Schale wieder mit einer beliebigen Zahl von Kastanien, die er einer der beiden anderen Schalen entnimmt. Dabei darf keine Schale leer bleiben. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, hat verloren, und das Spiel ist beendet.

Man untersuche, ob Linus oder ob Julian die Möglichkeit hat, den Sieg zu erzwingen. Man gebe eine Spielweise an, mit der dies möglich ist.

Aufgabe 8 (121043B). Edgar und Philip spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:

Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug“. Ein „Zug“ besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen „Zug“ zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am „Zug“ befindliche Spieler aber keinen „Zug“ nach den Spielregeln ausführen kann.

Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Aufgabe 9 (101244). Zwei Personen Jarno und Paul P. spielen das folgende Spiel:

In dem Gleichungssystem

$$x + a_1y = b_1 \quad (1)$$

$$a_2y + b_2z = a_3 \quad (2)$$

$$b_3x + a_4z = b_4 \quad (3)$$

wählt zunächst Jarno für den Koeffizienten a_1 , dann Paul P. für den Koeffizienten b_1 , dann wieder Jarno für a_2 , dann Paul P. für b_2 u.s.w., zum Schluß Paul P. für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

Jarno hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.

- a) Kann Jarno so spielen, d.h. kann er die Koeffizienten $a_1, \dots, a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, \dots, b_3$ durch Paul P. so auswählen, daß er gewinnt?
- b) Kann Jarno von vornherein für die Koeffizienten $a_1, \dots, a_4$ solche Werte angeben, daß er unabhängig von der Koeffizienten durch Paul P. (in jedem Falle) gewinnt?

Aufgabe 10 (211242). Zwei Personen Konrad und Alexander spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 1 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

belegt zunächst Konrad einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, Dann belegt Alexander einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder Konrad, dann Alexander u.s.w., bis endlich Konrad den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.

Konrad hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (4) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt. Alexander hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (4) keine oder unendlich viele reelle Lösungen besitzt.

Man untersuche, ob Alexander durch geeignete Belegungen in jedem Fall den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 11 (341246B). Zwei Personen Matthias und Yizhou spielen das folgende Spiel:

In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ belegt zunächst Matthias, danach Yizhou und schließlich wieder Matthias je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten a, b, c mit einer reellen Zahl. Das Spiel ist genau dann für Matthias gewonnen, wenn die so entstandenen Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.

Man untersuche, ob Matthias bei jeder Spielweise von Yizhou den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 12 (401143). Vanessa und Zijian spielen auf einem Blatt Kästchenpapier folgendes Spiel.

Sie beginnen mit einem n Zeilen und m Spalten großen Rechteck und zerschneiden es abwechselnd Zug für Zug in kleinere Rechtecke. Ein zulässiger Zug von Zijian ist ein senkrechter Schnitt, der ein $n \times m$ Rechteck in ein $n \times k$ und ein $n \times (m - k)$ Rechteck zerlegt ($k = 1, 2, \dots, m - 1$). Vanessa dagegen darf nur waagerechte Schnitte machen. Also wird bei ihr ein $n \times m$ Rechteck zu einem $j \times m$ und einem $(n - j) \times m$ großen Rechteck ($j = 1, 2, \dots, n - 1$). Bei jedem Zug dürfen die beiden also ein Rechteck auswählen und es senkrecht bzw. waagerecht beliebig in zwei Teile schneiden. Am Ende verliert derjenige, der keinen Schnitt mehr machen kann. Wenn also nur noch $j \times 1$ Rechtecke übrig sind, verliert Zijian, sind nur noch $1 \times k$ Rechtecke übrig, verliert Vanessa. Das Spiel wird jetzt mit einem 60×40 Rechteck begonnen.

- a) Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Zijian anfangt?
- b) Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Vanessa anfangt?

Aufgabe 13 (371342). Zwei Schüler Jan und Johannes spielen miteinander folgendes Spiel:

Begonnen wird mit einem Häufchen von 1998 Streichhölzern. Die Spieler ziehen abwechselnd, wobei Jan beginnt. Wer am Zug ist, muß eine Quadratzahl (größer oder gleich 1) von Streichhölzern wegnehmen. Sieger ist derjenige, der den letzten Zug ausführen kann. Man entscheide, wer von beiden den Sieg erzwingen kann, und gebe an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt.

Aufgabe 14 (IMO 2015, Shortlist C4). Es sei n eine positive ganze Zahl. Zwei Spieler Gisa und Christian spielen ein Spiel, wo sie abwechselnd positive ganze Zahlen $k \leq n$ nennen. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- (i) Ein Spieler darf keine Zahl nennen, die bereits von irgendeinem Spieler vorher genannt wurde.
- (ii) Ein Spieler darf die Zahl k nicht nennen, wenn er in einem vorherigen Zug bereits die $k - 1$ oder die $k + 1$ genannt hat.
- (iii) Das Spiel endet in einem Unentschieden, wenn alle möglichen Zahlen genannt wurden. Ansonsten verliert der Spieler, der keine Zahl mehr nennen darf.

Christian beginnt. Wie endet das Spiel, wenn beide optimal spielen?

Aufgabe 15 (IMO 1994, Shortlist C6). Elbrus und Caro spielen ein Spiel, wo sie abwechselnd leere Zellen in einem unendlich großen Gitter markieren, Elbrus mit einem X, Caro mit einem O. Elbrus versucht, dass 11 Zellen in einer Reihe, einer Spalte oder einer Diagonalen alle mit einem X versehen sind, während Caro versucht das zu verhindern. Wer kann sein Ziel erreichen?

Aufgabe 16 (IMO 1990, Aufgabe 5). Zwei Spieler Fabian und Heiner spielen ein Spiel, wo sie abwechselnd Zahlen nach folgender Regel nennen: Am Anfang ist eine natürliche Zahl $n_0 > 1$ gegeben. Wurde die Zahl n_{2k} genannt, muss Fabian eine Zahl $n_{2k+1} \in \mathbb{N}$, welche

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$$

erfüllt. Dann nennt Heiner eine Zahl $n_{2k+2} \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$$

mit p prim und $r \in \mathbb{N}$ gilt.

Es ist abgemacht, dass Fabian gewinnt, wenn er die 1990 nennt, und dass Heiner gewinnt, wenn er die 1 nennt. Für welche n_0 kann Fabian gewinnen, für welche n_0 kann Heiner gewinnen und für welche n_0 können beide ein Unentschieden erzwingen?

Aufgabe 17. Während alle anderen komische Spiele spielen, essen Silas und Fabien Kekse. Diese liegen am Anfang in einem $n \times m$ Rechteck. Der Keks in der unteren, linken Ecke enthält Orangengelee und schmeckt somit widerlich (diese Tatsache muss nicht bewiesen werden). Silas und Fabien machen nun abwechselnd Züge, wo sie stets einen noch verbleibenden Keks sowie sämtliche Kekse, die sowohl oberhalb als auch rechts von dem gewählten Keks liegen, in ihre jeweiligen Mägen performen. Für welche m und n kann Silas als Beginnender dafür sorgen, dass Fabien den ekelhaften Keks essen muss?