Invarianzprinzip

Einführungsaufgaben

Aufgabe 1 (Dominosteine). Ein quadratisches Feld wird in n^2 gleich große Einheitsquadrate aufgeteilt, wobei n eine gerade Zahl sei. Mit Dominosteinen, die jeweils genau zwei Einheitsquadrate abdecken, lässt sich das große Quadrat lückenlos mit Dominosteinen überdecken. Nun werden aus dem großem Quadrat zwei Einheitsquadrate herausgeschnitten, und zwar die gegenüberliegenden Ecken. Lässt sich auch die Restfläche lückenlos mit Dominosteinen überdecken?

Aufgabe 2 (Vorzeichen). Gegeben sei ein $n \times m$-Rechteck, dessen Zellen mit ganzen Zahlen gefüllt sind. In jedem Schritt kannst du eine Zeile oder Spalte auswählen und das Vorzeichen jedes Eintrages in dieser Zeile oder Spalte ändern. Zeige dass du es in einer endlichen Anzahl an Schritten schaffen kannst, dass die Summe jeder Zeile und jeder Spalte nicht negativ ist.

Weitere Aufgaben

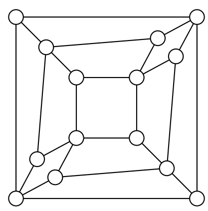
Aufgabe 3 (Der 100-köpfige Drache). Ein Drache hat 100 Köpfe. Ein Ritter kann ihm mit einem Schwertschlag 15, 17, 20 oder 5 Köpfe abschlagen. In jedem dieser Fälle wachsen dem Drachen 24, 2, 14 bzw. 17 neue Köpfe. Der Drache stirbt, wenn es der Ritter schafft ihm alle Köpfe abzuschlagen. Kann der Drache jemals sterben?

Aufgabe 4 (Steine). Auf einem Tisch liegt ein Haufen mit 1001 Spielsteinen. Ein Zug besteht darin, einen Haufen, der mehr als einen Stein enthält, auszuwählen, von diesem einen Stein zu entfernen und den Haufen anschließend in zwei - nicht zwingender weise gleichgroße Haufen - aufzuteilen. Kann man nach endlich vielen Zügen einen Zustand erreicht haben, in dem alle Haufen auf dem Tisch aus 3 Steinen bestehen?

Aufgabe 5 (Ein Flur). Ein rechteckiger Flur ist mit Fliesen der Größe 2×2 und mit Fliesen der Größe 4×1 vollständig bedeckt. Nun geht eine dieser Fliesen kaputt, und es sind nur noch Fliesen der anderen Sorte da. Kann man die Fliesen so umsortieren, dass wieder der ganze Flur bedeckt ist?

Aufgabe 6 (Ein aufgeteilter Kreis). Ein Kreis ist in 6 Kreissektoren aufgeteilt. Die Zahlen 1, 0, 1, 0, 0, 0 sind gegen den Uhrzeigersinn in die Sektoren geschrieben worden. In einem Schritt erhöht man zwei benachbarte Zahlen um 1. Ist es möglich, dass durch solche Schritte alle Zahlen im Kreis gleich werden?

Aufgabe 7 (Karten). Die untenstehende Karte zeigt die Straßen, die 14 verschiedene Städte verbinden. Ist es möglich einen Weg zu finden, so dass jede Stadt genau einmal durchfahren wird?



Aufgabe 8 (Tabelle). In der untenstehenden Tabelle darfst du folgende Operationen durchführen:

- Die Vorzeichen aller Zahlen einer Reihe oder Spalte ändern
- Die Vorzeichen aller Zahlen auf einer Parallele zu einer Diagonalen ändern (insbesondere das Vorzeichen eines Eckfeldes)

Zeige, dass immer mindestens eine -1 in der Tabelle steht!

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Aufgabe 9 (Chamäleons). Auf der Insel Lummerland leben 13 blaue, 15 grüne und 17 rote Chamäleons. Begegnen sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe, so ändern beide ihre Farbe in die dritte. Kann es vorkommen, dass schließlich alle Chamäleons dieselbe Farbe besitzen?

Aufgabe 10 (Gummibärchen Spiel). Auf einem Tisch liegen beliebig viele rote und grüne Gummibärchen. Man darf zwei gleichfarbige Gummibärchen wegnehmen und durch ein rotes ersetzten oder zwei ungleichfarbige Gummibärchen entfernen und durch ein grünes ersetzen. Zeige, dass das die Farbe des letzten Gummibärchens, das noch auf dem Tisch liegt unabhängig von der Reihenfolge des Entfernens ist.

Aufgabe 11 (Quersumme). Sei $Q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl. Hat die Gleichung $n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2009$ eine Lösung?

Aufgabe 12 (Minus Eins). Auf einem Feld eines 5×5 Schachbrettes steht „-1“, auf den anderen 24 Feldern „$+1$“. Durch Invertieren von $a \times a$ Teilquadraten, $a > 1$, wird erreicht, dass auf allen Feldern „$+1$“ steht. Wo kann „-1“ gestanden haben?

Aufgabe 13 (Binäre Wörter). Betrachte eine beliebige binäre Zahl $W = a_1a_2 \cdots a_n$. Diese darf durch Einfügen, Löschen oder Anhängen von XXX verändert werden, wobei X eine beliebige binäre Zahl ist. Kann man dadurch die Zahl 01 in 10 umändern?

Aufgabe 14 (Viren). Auf einem 10×10 Quadrat sind 9 1×1 Zellen mit einem schlimmen Virus befallen. In einer Zeiteinheit werden Zellen, die mindestens zwei befallene Nachbarn haben, infiziert. Kann sich die Infektion über das ganze Quadrat ausbreiten?

Aufgabe 15 (Permutationen). Die Zahlen $1, \cdots, n$ sind in einer beliebigen Reihenfolge angeordnet. In einem Schritt darf man zwei benachbarte Zahlen vertauschen. Zeige, dass man nach einer ungeraden Anzahl von Schritten nicht die Ausgangssituation erhalten kann.

Aufgabe 16 (Das MU-Rätsel:). Gegeben sei das Alphabet $\{M, U, I\}$ sowie folgende Regeln zum Basteln von Wörtern.

- X sei ein beliebiges Wort, gebildet aus den Buchstaben des „Alphabets“. Ist MX ein Wort, so ist auch MXX eines.
- Endet ein Wort auf I, so kann man ein U anhängen.

- Drei aufeinander folgende Buchstaben I oder zwei aufeinander folgende Buchstaben U können gestrichen werden.

Frage: Lässt sich das Wort MI in einer endlichen Anzahl von Schritten in das Wort MU umwandeln? Wenn ja, wie?

Aufgabe 17 (Engel, Number Theory, 158)**.** Beginne mit einigen positiven ganzen Zahlen. In jedem Schritt suchst du dir zwei Zahlen a und b aus und ersetzt sie durch $\mathrm{ggT}(a,b)$ und $\mathrm{kgV}(a,b)$. Zeige, dass sich irgendwann die Zahlen nicht mehr ändern.

1 Aktuelle Wettbewerbsaufgaben

Aufgabe 18 (Baltic Way 2017)**.** Auf einem (4×4)-Spielbrett sind 15 Spielsteine auf 15 verschiedenen Feldern platziert. Das 16. Feld ist leer. Befinden sich zwei Steine auf benachbarten Feldern (d.h., Feldern mit einer gemeinsamen Seite), dann kann man mit einem der Steine über den anderen auf dessen gegenüberliegendes Nachbarfeld springen, sofern dieses leer ist. Der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen. Für welche Anfangspositionen des leeren Feldes ist es möglich, dass sich am Ende nur noch ein Stein auf dem Spielbrett befindet.

Aufgabe 19 (Baltic Way 2017)**.** Ein Springer beim Schach hat ein verletztes Bein und humpelt. Daher macht er abwechselnd einen normalen Springerzug und einen kurzen Zug, bei dem er auf ein diagonal benachbartes Feld zieht. Der Springer bewegt sich auf einem (5×6)-Brett und beginnt mit einem normalen Zug. Wie viele Züge kann er höchstens machen, wenn er das Ausgangsfeld frei wählen kann und kein Feld (auch nicht das Ausgagngsfeld) mehr als einmal betreten darf?

Aufgabe 20 (MEMO 2016)**.** Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-entarteten und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a + b - c$, $b + c - a$ und $c + a - b$ zu ersetzen. Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.

Aufgabe 21 (IMO Shortlist 2014 C4)**.** Aus zwei 2×1-Dominosteinen kann man ein Tetromino konstruieren, indem man die beiden Dominosteine längs ihrer längeren Seiten so aneinanderlegt, dass der Mittelpunkt der längeren Seite des einen Dominostein ein Eckpunkt des anderen Dominosteins ist. Dabei ergeben sich zwei hinsichtlich ihrer Orientierung verschiedene Typen von Tetrominos, die wir als S- bzw. Z-Tetromino bezeichnen wollen.

S-Tetromino Z-Tetromino

Ein Gitterpunktpolygon P ist eine einfach zusammenhägende Fläche, deren Randlinien nur auf Gitterlinien des ebenen ganzzahligen Koordinatengitters liegen. Eine Pflasterung von P ist eine vollständige und überlappungsfreie Überdeckung von P mit Flächenstücken, die auch nicht teilweise außerhalb von P liegen.

Wir nehmen an, dass ein Gitterpunktpolygon P nur mit S-Tetrominos gepflastert werden kann. Man beweise: Wenn auch eine Pflasterung von P mit S- und Z-Tetrominos möglich ist, dass ist die Anzahl der dabei verwendeten Z-Tetrominos stets gerade.

Aufgabe 22 (IMO Shortlist 1994)**.** Auf einem unendlichen quadratischen Gitter spielen zwei Spieler A und B ein Tic-Tac-Toe-ähnliches Spiel: Sie markieren abwechselnd ein Feld, A mit einem X, B mit einem O. Zeige, dass B verhindern kann, dass irgendwann in einer Reihe, einer Spalte oder einer Diagonale 11 Felder hintereinander alle mit X markiert sind

Weitere Aufgaben mit Hilfestellungen darunter

Example 2 (ELMO 1999)
Jimmy moves around on the lattice point. From points (x, y) he may move to any of the points (y, x), $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x+1, y+4)$ and $(x-1, y-4)$ show that if he starts at $(0, 1)$ he can never get to $(0, 0)$.

Walkthrough.

1. The sum of the coordinates of (x, y) in modulo 5 is $x + y \pmod 5$. What about after we apply the operations? (You'll have to consider each operation individually.)

2. Can the resulting sum of coordinates ever be $0 \pmod 5$ if we start with a sum of coordinates $1 \pmod 5$?

Example 3 (ISL 2014)
The number 1 is written on each of 2^n sheets of paper. Each minute we are allowed to choose two distinct sheets, erase the two numbers a and b appearing on them and writing the number $a+b$ instead on both sheets. Prove that after $n2^{n-1}$ minutes the sum of the numbers on all sheets is at least 4^n.

Walkthrough. Let P be the product of the numbers on the sheets. Note that $P \geq 1$.

1. Show that by AM-GM,
$$(a+b)^2 \geq 4ab.$$

2. After one operation, show the new product is $\frac{(a+b)^2}{ab}P \geq 4P$.

3. Thus, after $n2^{n-1}$ minutes the product is at least $4^{n \cdot 2^{n-1}}$.

4. Using AM-GM again, show that
$$\frac{S}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{P}.$$

5. Manipulate the above to get $S \geq 4^n$ as desired.

Example 4
The numbers $1, 2, \ldots, 2008$ are written on a blackboard. Every second, Jimmy erases four numbers of the form $a, b, c, a+b+c$, and replaces them with the numbers $a+b, b+c, c+a$. Prove that this can continue for at most 10 minutes.

Walkthrough.

1. The obvious invariant: the sum never changes. The obvious monovariant: the number of terms decreases by 1 each second. Find the non-obvious invariant.

2. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be on the blackboard. Then by Cauchy-Schwarz,
$$n(x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$
Plug in the two invariants to find the lower bound of n.

3. If there must be n terms on the blackboard, then at most $2008 - n$ seconds have passed. Show that our lower bound guarantees that at most 10 minutes have passed as desired.

Example 5 (St. Petersburg 2013)
There are 100 numbers from the interval $(0, 1)$ on the board. Every minute we can replace two numbers a, b on the board with the roots of $x^2 - ax + b = 0$ (if it has two real roots). Prove that this process must stop at some moment.

Walkthrough. Assume (for the sake of contradiction) the process is endless. Let $N < 1$ be a real number such that all of the 100 initial numbers are smaller than N.

1. Prove that if $a, b < N$ then
$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < N.$$
Thus, all numbers on the board will always be smaller than N.

2. Let S and P be the sum and product of the numbers on the board, respectively. Furthermore, let S_0 and P_0 be the sum and product of the initial 100 numbers. Prove that
$$S < S_0 \qquad P > \frac{P_0}{N^M}.$$

3. Apply AM-GM to get $S \geq 100 \sqrt[100]{P}$. Show that this gives us a contradiction for sufficiently large M.

Example 10
The first quadrant is divided into unit squares. We are allowed to perform the following move: if the square (x, y) has a token, while $(x, y+1), (x+1, y)$ are empty, then we take the token on (x, y) and put a token on each of the other two squares.

Initially, we have tokens on $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$. Can we clear these six squares by a sequence of moves?

Walkthrough. Assign the weight $\frac{1}{2^{x+y}}$ to the cell (x, y) if there is a token at (x, y) , and assign it a weight of 0 otherwise, for all positive integers x, y.

1. Prove that the sum of all the weights in the first quadrant is invariant. Furthermore, show that the sum is $\frac{11}{16}$.

2. If none of the six initial squares have a token, then what is the maximum sum of all weights? (Hint: maximum is achieved when we put weights in every eligible location.)

3. Show that this maximum sun can never equal $\frac{11}{16}$, contradiction.