Invarianzprinzip

Einführungsaufgaben

Aufgabe 1 (**Dominosteine**)**.** Ein quadratisches Feld wird in n^2 gleich große Einheitsquadrate aufgeteilt, wobei n eine gerade Zahl sei. Mit Dominosteinen, die jeweils genau zwei Einheitsquadrate abdecken, lässt sich das große Quadrat lückenlos mit Dominosteinen überdecken. Nun werden aus dem großem Quadrat zwei Einheitsquadrate herausgeschnitten, und zwar die gegenüberliegenden Ecken. Lässt sich auch die Restfläche lückenlos mit Dominosteinen überdecken?

Aufgabe 2 (**Vorzeichen**)**.** Gegeben sei ein $n \times m$-Rechteck, dessen Zellen mit ganzen Zahlen gefüllt sind. In jedem Schritt kannst du eine Zeile oder Spalte auswählen und das Vorzeichen jedes Eintrages in dieser Zeile oder Spalte ändern. Zeige dass du es in einer endlichen Anzahl an Schritten schaffen kannst, dass die Summe jeder Zeile und jeder Spalte nicht negativ ist.

Weitere Aufgaben

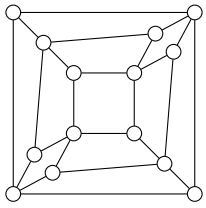
Aufgabe 3 (**Der** 100**-köpfige Drache**)**.** Ein Drache hat 100 Köpfe. Ein Ritter kann ihm mit einem Schwertschlag 15, 17, 20 oder 5 Köpfe abschlagen. In jedem dieser Fälle wachsen dem Drachen 24, 2, 14 bzw. 17 neue Köpfe. Der Drache stirbt, wenn es der Ritter schafft ihm alle Köpfe abzuschlagen. Kann der Drache jemals sterben?

Aufgabe 4 (**Steine**)**.** Auf einem Tisch liegt ein Haufen mit 1001 Spielsteinen. Ein Zug besteht darin, einen Haufen, der mehr als einen Stein enthält, auszuwählen, von diesem einen Stein zu entfernen und den Haufen anschließend in zwei - nicht zwingender weise gleichgroße Haufen - aufzuteilen. Kann man nach endlich vielen Zügen einen Zustand erreicht haben, in dem alle Haufen auf dem Tisch aus 3 Steinen bestehen?

Aufgabe 5 (**Ein Flur**)**.** Ein rechteckiger Flur ist mit Fliesen der Größe 2×2 und mit Fliesen der Größe 4×1 vollständig bedeckt. Nun geht eine dieser Fliesen kaputt, und es sind nur noch Fliesen der anderen Sorte da. Kann man die Fliesen so umsortieren, dass wieder der ganze Flur bedeckt ist?

Aufgabe 6 (**Ein aufgeteilter Kreis**)**.** Ein Kreis ist in 6 Kreissektoren aufgeteilt. Die Zahlen 1, 0, 1, 0, 0, 0 sind gegen den Uhrzeigersinn in die Sektoren geschrieben worden. In einem Schritt erhöht man zwei benachbarte Zahlen um 1. Ist es möglich, dass durch solche Schritte alle Zahlen im Kreis gleich werden?

Aufgabe 7 (**Karten**)**.** Die untenstehende Karte zeigt die Straßen, die 14 verschiedene Städte verbinden. Ist es möglich einen Weg zu finden, so dass jede Stadt genau einmal durchfahren wird?



Aufgabe 8 (**Tabelle**)**.** In der untenstehenden Tabelle darfst du folgende Operationen durchführen:

- Die Vorzeichen aller Zahlen einer Reihe oder Spalte ändern
- Die Vorzeichen aller Zahlen auf einer Parallele zu einer Diagonalen ändern (insbesondere das Vorzeichen eines Eckfeldes)

Zeige, dass immer mindestens eine -1 in der Tabelle steht!

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Aufgabe 9 (**Chamäleons**)**.** Auf der Insel Lummerland leben 13 blaue, 15 grüne und 17 rote Chamäleons. Begegnen sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe, so ändern beide ihre Farbe in die dritte. Kann es vorkommen, dass schließlich alle Chamäleons dieselbe Farbe besitzen?

Aufgabe 10 (**Gummibärchen Spiel**)**.** Auf einem Tisch liegen beliebig viele rote und grüne Gummibärchen. Man darf zwei gleichfarbige Gummibärchen wegnehmen und durch ein rotes ersetzten oder zwei ungleichfarbige Gummibärchen entfernen und durch ein grünes ersetzen. Zeige, dass das die Farbe des letzten Gummibärchens, das noch auf dem Tisch liegt unabhängig von der Reihenfolge des Entfernens ist.

Aufgabe 11 (**Quersumme**)**.** Sei $Q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl. Hat die Gleichung $n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2009$ eine Lösung?

Aufgabe 12 (**Minus Eins**)**.** Auf einem Feld eines 5×5 Schachbrettes steht „-1“, auf den anderen 24 Feldern „$+1$“. Durch Invertieren von $a \times a$ Teilquadraten, $a > 1$, wird erreicht, dass auf allen Feldern „$+1$“ steht. Wo kann „-1“ gestanden haben?

Aufgabe 13 (**Binäre Wörter**)**.** Betrachte eine beliebige binäre Zahl $W = a_1 a_2 \cdots a_n$. Diese darf durch Einfügen, Löschen oder Anhängen von XXX verändert werden, wobei X eine beliebige binäre Zahl ist. Kann man dadurch die Zahl 01 in 10 umändern?

Aufgabe 14 (**Viren**)**.** Auf einem 10×10 Quadrat sind 9 1×1 Zellen mit einem schlimmen Virus befallen. In einer Zeiteinheit werden Zellen, die mindestens zwei befallene Nachbarn haben, infiziert. Kann sich die Infektion über das ganze Quadrat ausbreiten?

Aufgabe 15 (**Permutationen**)**.** Die Zahlen $1, \cdots, n$ sind in einer beliebigen Reihenfolge angeordnet. In einem Schritt darf man zwei benachbarte Zahlen vertauschen. Zeige, dass man nach einer ungeraden Anzahl von Schritten nicht die Ausgangssituation erhalten kann.

Aufgabe 16 (**Das MU-Rätsel:**)**.** Gegeben sei das Alphabet $\{M, U, I\}$ sowie folgende Regeln zum Basteln von Wörtern.

- X sei ein beliebiges Wort, gebildet aus den Buchstaben des „Alphabets“. Ist MX ein Wort, so ist auch MXX eines.
- Endet ein Wort auf I, so kann man ein U anhängen.

- Drei aufeinander folgende Buchstaben I oder zwei aufeinander folgende Buchstaben U können gestrichen werden.

Frage: Lässt sich das Wort MI in einer endlichen Anzahl von Schritten in das Wort MU umwandeln? Wenn ja, wie?

Aufgabe 17 (Engel, Number Theory, 158)**.** Beginne mit einigen positiven ganzen Zahlen. In jedem Schritt suchst du dir zwei Zahlen a und b aus und ersetzt sie durch $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$. Zeige, dass sich irgendwann die Zahlen nicht mehr ändern.

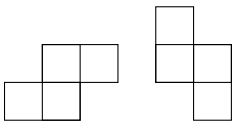
1 Aktuelle Wettbewerbsaufgaben

Aufgabe 18 (Baltic Way 2017)**.** Auf einem (4×4)-Spielbrett sind 15 Spielsteine auf 15 verschiedenen Feldern platziert. Das 16. Feld ist leer. Befinden sich zwei Steine auf benachbarten Feldern (d.h., Feldern mit einer gemeinsamen Seite), dann kann man mit einem der Steine über den anderen auf dessen gegenüberliegendes Nachbarfeld springen, sofern dieses leer ist. Der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen. Für welche Anfangspositionen des leeren Feldes ist es möglich, dass sich am Ende nur noch ein Stein auf dem Spielbrett befindet.

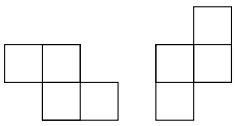
Aufgabe 19 (Baltic Way 2017)**.** Ein Springer beim Schach hat ein verletztes Bein und humpelt. Daher macht er abwechselnd einen normalen Springerzug und einen kurzen Zug, bei dem er auf ein diagonal benachbartes Feld zieht. Der Springer bewegt sich auf einem (5×6)-Brett und beginnt mit einem normalen Zug. Wie viele Züge kann er höchstens machen, wenn er das Ausgangsfeld frei wählen kann und kein Feld (auch nicht das Ausgagngsfeld) mehr als einmal betreten darf?

Aufgabe 20 (MEMO 2016)**.** Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-entarteten und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a + b - c$, $b + c - a$ und $c + a - b$ zu ersetzen. Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.

Aufgabe 21 (IMO Shortlist 2014 C4)**.** Aus zwei 2×1-Dominosteinen kann man ein Tetromino konstruieren, indem man die beiden Dominosteine längs ihrer längeren Seiten so aneinanderlegt, dass der Mittelpunkt der längeren Seite des einen Dominostein ein Eckpunkt des anderen Dominosteins ist. Dabei ergeben sich zwei hinsichtlich ihrer Orientierung verschiedene Typen von Tetrominos, die wir als S- bzw. Z-Tetromino bezeichnen wollen.



S-Tetromino



Z-Tetromino

Ein Gitterpunktpolygon P ist eine einfach zusammenhägende Fläche, deren Randlinien nur auf Gitterlinien des ebenen ganzzahligen Koordinatengitters liegen. Eine Pflasterung von P ist eine vollständige und überlappungsfreie Überdeckung von P mit Flächenstücken, die auch nicht teilweise außerhalb von P liegen.

Wir nehmen an, dass ein Gitterpunktpolygon P nur mit S-Tetrominos gepflastert werden kann. Man beweise: Wenn auch eine Pflasterung von P mit S- und Z-Tetrominos möglich ist, dass ist die Anzahl der dabei verwendeten Z-Tetrominos stets gerade.

Aufgabe 22 (IMO Shortlist 1994)**.** Auf einem unendlichen quadratischen Gitter spielen zwei Spieler A und B ein Tic-Tac-Toe-ähnliches Spiel: Sie markieren abwechselnd ein Feld, A mit einem X, B mit einem O. Zeige, dass B verhindern kann, dass irgendwann in einer Reihe, einer Spalte oder einer Diagonale 11 Felder hintereinander alle mit X markiert sind

Weitere Aufgaben mit Hilfestellungen darunter

Example 2 (ELMO 1999)
Jimmy moves around on the lattice point. From points (x, y) he may move to any of the points (y, x), $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x + 1, y + 4)$ and $(x - 1, y - 4)$ show that if he starts at $(0, 1)$ he can never get to $(0, 0)$.

Walkthrough.

1. The sum of the coordinates of (x, y) in modulo 5 is $x + y \pmod 5$. What about after we apply the operations? (You'll have to consider each operation individually.)
2. Can the resulting sum of coordinates ever be $0 \pmod 5$ if we start with a sum of coordinates $1 \pmod 5$?

Example 3 (ISL 2014)
The number 1 is written on each of 2^n sheets of paper. Each minute we are allowed to choose two distinct sheets, erase the two numbers a and b appearing on them and writing the number $a + b$ instead on both sheets. Prove that after $n2^{n-1}$ minutes the sum of the numbers on all sheets is at least 4^n.

Walkthrough. Let P be the product of the numbers on the sheets. Note that $P \geq 1$.

1. Show that by AM-GM,
$$(a + b)^2 \geq 4ab.$$
2. After one operation, show the new product is $\frac{(a+b)^2}{ab} P \geq 4P$.
3. Thus, after $n2^{n-1}$ minutes the product is at least $4^{n \cdot 2^{n-1}}$.
4. Using AM-GM again, show that
$$\frac{S}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{P}.$$
5. Manipulate the above to get $S \geq 4^n$ as desired.

Example 4
The numbers $1, 2, \ldots, 2008$ are written on a blackboard. Every second, Jimmy erases four numbers of the form $a, b, c, a+b+c$, and replaces them with the numbers $a+b, b+c, c+a$. Prove that this can continue for at most 10 minutes.

Walkthrough.

1. The obvious invariant: the sum never changes. The obvious monovariant: the number of terms decreases by 1 each second. Find the non-obvious invariant.
2. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be on the blackboard. Then by Cauchy-Schwarz,
$$n(x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$
Plug in the two invariants to find the lower bound of n.
3. If there must be n terms on the blackboard, then at most $2008 - n$ seconds have passed. Show that our lower bound guarantees that at most 10 minutes have passed as desired.

Example 5 (St. Petersburg 2013)
There are 100 numbers from the interval $(0, 1)$ on the board. Every minute we can replace two numbers a, b on the board with the roots of $x^2 - ax + b = 0$ (if it has two real roots). Prove that this process must stop at some moment.

Walkthrough. Assume (for the sake of contradiction) the process is endless. Let $N < 1$ be a real number such that all of the 100 initial numbers are smaller than N.

1. Prove that if $a, b < N$ then
$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < N.$$
Thus, all numbers on the board will always be smaller than N.
2. Let S and P be the sum and product of the numbers on the board, respectively. Furthermore, let S_0 and P_0 be the sum and product of the initial 100 numbers. Prove that
$$S < S_0 \qquad P > \frac{P_0}{N^M}.$$
3. Apply AM-GM to get $S \geq 100\sqrt[100]{P}$. Show that this gives us a contradiction for sufficiently large M.

Example 10
The first quadrant is divided into unit squares. We are allowed to perform the following move: if the square (x, y) has a token, while $(x, y+1), (x+1, y)$ are empty, then we take the token on (x, y) and put a token on each of the other two squares.

Initially, we have tokens on $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)$. Can we clear these six squares by a sequence of moves?

Walkthrough. Assign the weight $\frac{1}{2^{x+y}}$ to the cell (x, y) if there is a token at (x, y) , and assign it a weight of 0 otherwise, for all positive integers x, y.

1. Prove that the sum of all the weights in the first quadrant is invariant. Furthermore, show that the sum is $\frac{11}{16}$.
2. If none of the six initial squares have a token, then what is the maximum sum of all weights? (Hint: maximum is achieved when we put weights in every eligible location.)
3. Show that this maximum sun can never equal $\frac{11}{16}$, contradiction.

541232

Die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ist durch $x_1 = 3$ und die rekursive Vorschrift

$$x_{n+1} = \frac{n+2}{n}(x_n - 1) \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

gegeben. Man beweise, dass sämtliche Glieder der Folge ganzzahlig sind.

Idee: zeige x_n ist ganz für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang: x_1 ist ganz ✓

Induktionsschritt: zu zeigen:

x_n ist ganz, $x_{n+1} = \frac{n+2}{n}(x_n - 1) \Rightarrow x_{n+1}$ ist ganz.

Problem: Das stimmt nicht immer

z. B. wenn $x_3 = 3$, dann wäre $x_4 = \frac{5}{3} \cdot 2 \notin \mathbb{Z}$

$x_1 = 3$ $x_2 = 6$, $x_3 = 10$, $x_4 = 15$

⚠ Immer die ersten Zahlen ausrechnen

Vermutung $x_n = 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$x_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

$x_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

$x_3 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 0$

Das zeigen wir per Induktion:

Ind. anf. $x_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ ✓

Ind. schritt

$x_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $x_{n+1} = \frac{n+2}{n}(x_n - 1) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$

$x_{n+1} = \frac{n+2}{n}(x_n - 1)$

$\overset{IH}{=} \frac{n+2}{n}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)$

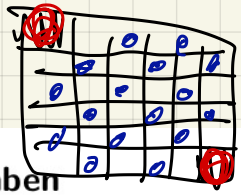
$= \frac{n+2}{n}\left(\frac{n^2+3n+2}{2} - 1\right)$

$$= \frac{n+2}{n}\left(\frac{n^2+3n}{2}\right)$$

$$= \frac{n+2}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+3)}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

✓



Invarianz Monovarianz

Einführungsaufgaben

Aufgabe 1 (**Dominosteine**). Ein quadratisches Feld wird in n^2 gleich große Einheitsquadrate aufgeteilt, wobei n eine gerade Zahl sei. Mit Dominosteinen, die jeweils genau zwei Einheitsquadrate abdecken, lässt sich das große Quadrat lückenlos mit Dominosteinen überdecken. Nun werden aus dem großem Quadrat zwei Einheitsquadrate herausgeschnitten, und zwar die gegenüberliegenden Ecken. Lässt sich auch die Restfläche lückenlos mit Dominosteinen überdecken?

Aufgabe 2 (**Vorzeichen**). Gegeben sei ein $n \times m$-Rechteck, dessen Zellen mit ganzen Zahlen gefüllt sind. In jedem Schritt kannst du eine Zeile oder Spalte auswählen und das Vorzeichen jedes Eintrages in dieser Zeile oder Spalte ändern. Zeige dass du es in einer endlichen Anzahl an Schritten schaffen kannst, dass die Summe jeder Zeile und jeder Spalte nicht negativ ist.

Weitere Aufgaben

Aufgabe 3 (**Der 100-köpfige Drache**). Ein Drache hat 100 Köpfe. Ein Ritter kann ihm mit einem Schwertschlag 15, 17, 20 oder 5 Köpfe abschlagen. In jedem dieser Fälle wachsen dem Drachen 24, 2, 14 bzw. 17 neue Köpfe. Der Drache stirbt, wenn es der Ritter schafft ihm alle Köpfe abzuschlagen. Kann der Drache jemals sterben?

Köpfe mod 3 ändert sich

Aufgabe 4 (**Steine**). Auf einem Tisch liegt ein Haufen mit 1001 Spielsteinen. Ein Zug besteht darin, einen Haufen, der mehr als einen Stein enthält, auszuwählen, von diesem einen Stein zu entfernen und den Haufen anschließend in zwei - nicht zwingender weise gleichgroße Haufen - aufzuteilen. Kann man nach endlich vielen Zügen einen Zustand erreicht haben, in dem alle Haufen auf dem Tisch aus 3 Steinen bestehen?

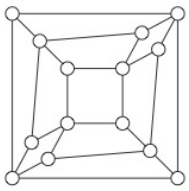
Steine + # Haufen ist immer 1002

↳ Dann wären $s = 3h$ und $s+h = 1002 \Rightarrow 4h = 1002$ ↯

Aufgabe 5 (**Ein Flur**). Ein rechteckiger Flur ist mit Fliesen der Größe 2×2 und mit Fliesen der Größe 4×1 vollständig bedeckt. Nun geht eine dieser Fliesen kaputt, und es sind nur noch Fliesen der anderen Sorte da. Kann man die Fliesen so umsortieren, dass wieder der ganze Flur bedeckt ist?

Aufgabe 6 (**Ein aufgeteilter Kreis**). Ein Kreis ist in 6 Kreissektoren aufgeteilt. Die Zahlen 1, 0, 1, 0, 0, 0 sind gegen den Uhrzeigersinn in die Sektoren geschrieben worden. In einem Schritt erhöht man zwei benachbarte Zahlen um 1. Ist es möglich, dass durch solche Schritte alle Zahlen im Kreis gleich werden?

Aufgabe 7 (**Karten**). Die untenstehende Karte zeigt die Straßen, die 14 verschiedene Städte verbinden. Ist es möglich einen Weg zu finden, so dass jede Stadt genau einmal durchfahren wird?



Aufgabe 8 (Tabelle). In der untenstehenden Tabelle darfst du folgende Operationen durchführen:

- Die Vorzeichen aller Zahlen einer Reihe oder Spalte ändern
- Die Vorzeichen aller Zahlen auf einer Parallele zu einer Diagonalen ändern (insbesondere das Vorzeichen eines Eckfeldes)

Zeige, dass immer mindestens eine -1 in der Tabelle steht!

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Aufgabe 9 (Chamäleons). Auf der Insel Lummerland leben 13 blaue, 15 grüne und 17 rote Chamäleons. Begegnen sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe, so ändern beide ihre Farbe in die dritte. Kann es vorkommen, dass schließlich alle Chamäleons dieselbe Farbe besitzen?

Aufgabe 10 (Gummibärchen Spiel). Auf einem Tisch liegen beliebig viele rote und grüne Gummibärchen. Man darf zwei gleichfarbige Gummibärchen wegnehmen und durch ein rotes ersetzten oder zwei ungleichfarbige Gummibärchen entfernen und durch ein grünes ersetzen. Zeige, dass das die Farbe des letzten Gummibärchens, das noch auf dem Tisch liegt unabhängig von der Reihenfolge des Entfernens ist.

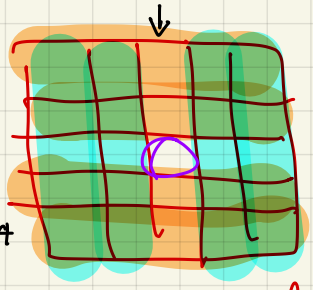
Aufgabe 11 (Quersumme). Sei $Q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl. Hat die Gleichung $n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2009$ eine Lösung?

Aufgabe 12 (Minus Eins). Auf einem Feld eines 5×5 Schachbrettes steht „-1“, auf den anderen 24 Feldern „$+1$“. Durch ~~Invertieren~~ Wechseln der Vorzeichen von $a \times a$ Teilquadraten, $a > 1$, wird erreicht, dass auf allen Feldern „$+1$“ steht. Wo kann „-1“ gestanden haben?

$Q(n) \equiv n \mod 3$ $\quad Q(n) \equiv n \mod 9$

$2 \equiv 2009 = n + Q(n) + Q(Q(n)) \equiv n + n + n \equiv 3n \equiv 0 \mod 3$ keine Lösung

Alle Quadrate (außer 1×1 Quadrate) haben eine gerade Anzahl blauer Felder.
↳ # -1 in blauen Feldern ändert sich nicht mod 2



↳ Die eine -1 muss in der mittleren Spalte sein.

Wenn es klappt, muss man mal ein 3×3 oder 5×5 Quadrat verwenden,

Selbes gilt für die Zeilen ⇒ -1 muss in der Mitte stehen.

Warum wird a=1 ausgeschlossen?
↳ Dann kann die -1 überall stehen?

Was, wenn wir nur gerade a erlauben?
↳ Dann bleibt die Anzahl der Felder mit -1 immer ungerade
↳ Die -1 kann nirgendwo stehen

Aufgabe 18 (Baltic Way 2017)**.** Auf einem (4×4)-Spielbrett sind 15 Spielsteine auf 15 verschiedenen Feldern platziert. Das 16. Feld ist leer. Befinden sich zwei Steine auf benachbarten Feldern (d.h., Feldern mit einer gemeinsamen Seite), dann kann man mit einem der Steine über den anderen auf dessen gegenüberliegendes Nachbarfeld springen, sofern dieses leer ist. Der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen. Für welche Anfangspositionen des leeren Feldes ist es möglich, dass sich am Ende nur noch ein Stein auf dem Spielbrett befindet.

Aufgabe 19 (Baltic Way 2017)**.** Ein Springer beim Schach hat ein verletztes Bein und humpelt. Daher macht er abwechselnd einen normalen Springerzug und einen kurzen Zug, bei dem er auf ein diagonal benachbartes Feld zieht. Der Springer bewegt sich auf einem (5×6)-Brett und beginnt mit einem normalen Zug. Wie viele Züge kann er höchstens machen, wenn er das Ausgangsfeld frei wählen kann und kein Feld (auch nicht das Ausgagngsfeld) mehr als einmal betreten darf?

Aufgabe 20 (MEMO 2016)**.** Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-entarteten und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a + b - c$, $b + c - a$ und $c + a - b$ zu ersetzen. Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.





Invariants

Dylan Yu

December 30, 2021

In this handout we explore the basics of invariants and monovariants, including the application of techniques like AM-GM and weighting. Special thanks to Pranav Sriram's *Olympiad Combinatorics* and AMSP Combinatorics 3 for most of these problems.

Contents

1 Introduction 1
- 1.1 Definitions . . . 1
- 1.2 More Exposition . . . 2

2 Classics 2

3 Brutal Examples 5

4 Problems 8
- 4.1 Appetizer . . . 8
- 4.2 Entree . . . 8
- 4.3 Dessert . . . 9

5 Selected Solutions 10
- 5.1 Solution 1 (ISL 1989) . . . 10
- 5.2 Solution 2 (ELMO 1999) . . . 10
- 5.3 Solution 3 (ISL 2014) . . . 10
- 5.4 Solution 4 . . . 11
- 5.5 Solution 5 (St. Petersburg 2013) . . . 11
- 5.6 Solution 7 (ISL 2012) . . . 11
- 5.7 Solution 8 (ToT 2016) . . . 12
- 5.8 Solution 10 . . . 12
- 5.9 Solution 12 (Russia 2014) . . . 12
- 5.10 Solution 13 (RMM SL 2016) . . . 13

1 Introduction

1.1 Definitions

Invariant
An ***invariant*** is a property or quantity that does not change under certain operations.

Monovariant
A ***semi-invariant*** or ***monovariant*** is a quantity that always increases or always decreases after the corresponding operation.

1.2 More Exposition

Classical examples of invariants are parity or algebraic expressions such as sums or products. Finding an invariant is a common idea in problems asking to prove that something cannot be achieved. Monovariants are also very efficient in showing that the corresponding process must stop after finitely many moves.

2 Classics

I'll skip over the "find the invariant and win" questions, since those just involve ***algebraic manipulation***. In other words, I'm skipping over to the main course.[1] In these problems we do one of three things (or a combination of them):

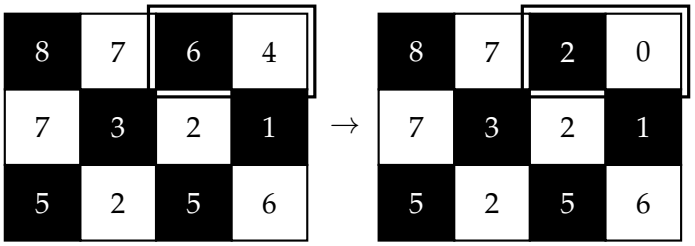
1. use algorithms, or
2. use modular arithmetic, or
3. use AM-GM.

Note AM-GM is for bounding.

Example 1 (ISL 1989)
A natural number is written in each square of an $m \times n$ chessboard. The allowed move is to add an integer k to each of two adjacent numbers in such a way that nonnegative numbers are obtained (two squares are adjacent if they share a common side). Find a necessary and sufficient condition for it to be possible for all the numbers to be zero after finitely many operations.

Walkthrough. Let S_b and S_w denote the sum of numbers on black and white squares, respectively.

1. Show that $S_b - S_w$ is invariant. The following figure might help:



[1] Try the problems in the problem set if you would like to see examples of these.

Thus, it seems that in order for all the numbers to be 0 at the end, we must have $S_b - S_w = 0$. We'll try to prove that this is the only thing we need to reach 0s at the end. Suppose a, b, c are numbers in cells A, B, C respectively, where A, B, C are cells such that A and C are both adjacent to B.

2. Find an algorithm for reducing a positive integer to 0 when $a \leq b$ and an algorithm for when $a \geq b$. Hint: play around with both cases using actual numbers.
3. Apply your algorithms in each row until all but the last two entries of each row are 0. Note that this just means that all columns besides the last 2 are filled with zeroes.
4. Apply the algorithm vertically until only two adjacent nonzero numbers remain. Clearly one of them is black square and the other is a white square.
5. Show that these two squares can only be cancelled if $S_b = S_w$ and finish.

This implies an important heuristic: **use an invariant to show a condition is necessary, and use an algorithm to show it's sufficient**.

Example 2 (ELMO 1999)
Jimmy moves around on the lattice point. From points (x, y) he may move to any of the points $(y, x), (3x, -2y), (-2x, 3y), (x + 1, y + 4)$ and $(x - 1, y - 4)$ show that if he starts at $(0, 1)$ he can never get to $(0, 0)$.

Walkthrough.

1. The sum of the coordinates of (x, y) in modulo 5 is $x + y \pmod 5$. What about after we apply the operations? (You'll have to consider each operation individually.)
2. Can the resulting sum of coordinates ever be $0 \pmod 5$ if we start with a sum of coordinates $1 \pmod 5$?

Always try invariants like:

1. sums
2. products
3. AM/GM/HM

This helps motivate what modulo is necessary.

Example 3 (ISL 2014)
The number 1 is written on each of 2^n sheets of paper. Each minute we are allowed to choose two distinct sheets, erase the two numbers a and b appearing on them and writing the number $a + b$ instead on both sheets. Prove that after $n2^{n-1}$ minutes the sum of the numbers on all sheets is at least 4^n.

Walkthrough. Let P be the product of the numbers on the sheets. Note that $P \geq 1$.

1. Show that by AM-GM,
$$(a + b)^2 \geq 4ab.$$
Alternatively, you can use trivial inequality.

2. After one operation, show the new product is $\frac{(a+b)^2}{ab}P \geq 4P$.
3. Thus, after $n2^{n-1}$ minutes the product is at least $4^{n\cdot 2^{n-1}}$.
4. Using AM-GM again, show that
$$\frac{S}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{P}.$$
5. Manipulate the above to get $S \geq 4^n$ as desired.

Example 4
The numbers $1, 2, \ldots, 2008$ are written on a blackboard. Every second, Jimmy erases four numbers of the form $a, b, c, a+b+c$, and replaces them with the numbers $a+b, b+c, c+a$. Prove that this can continue for at most 10 minutes.

Walkthrough.

1. The obvious invariant: the sum never changes. The obvious monovariant: the number of terms decreases by 1 each second. Find the non-obvious invariant.
2. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be on the blackboard. Then by Cauchy-Schwarz,
$$n(x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$
Plug in the two invariants to find the lower bound of n.
3. If there must be n terms on the blackboard, then at most $2008 - n$ seconds have passed. Show that our lower bound guarantees that at most 10 minutes have passed as desired.

Example 5 (St. Petersburg 2013)
There are 100 numbers from the interval $(0, 1)$ on the board. Every minute we can replace two numbers a, b on the board with the roots of $x^2 - ax + b = 0$ (if it has two real roots). Prove that this process must stop at some moment.

Walkthrough. Assume (for the sake of contradiction) the process is endless. Let $N < 1$ be a real number such that all of the 100 initial numbers are smaller than N.

1. Prove that if $a, b < N$ then
$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < N.$$
Thus, all numbers on the board will always be smaller than N.
2. Let S and P be the sum and product of the numbers on the board, respectively. Furthermore, let S_0 and P_0 be the sum and product of the initial 100 numbers. Prove that
$$S < S_0 \qquad P > \frac{P_0}{N^M}.$$
3. Apply AM-GM to get $S \geq 100\sqrt[100]{P}$. Show that this gives us a contradiction for sufficiently large M.

Fact 6. When sums and products are used in invariant/monovariant questions, it is a good idea to use AM-GM.

Now for a monovariant:

Example 7 (ISL 2012)
Several positive integers are written in a row. Alice chooses two adjacent numbers x and y such that $x > y$ and x is to the left of y, and replaces the pair (x, y) by either $(y+1, x)$ or $(x-1, x)$. Prove that she can perform only finitely many such iterations.

Walkthrough. I'll let you do this one (basically) by yourself:

1. Show that
$$S = a_1 + 2a_2 + \ldots + ka_k + \ldots + na_n$$
is monovariant.
2. Hint: what is the difference between the new value of S and the old one after we perform a move?

3 Brutal Examples

Example 8 (ToT 2016)
On a blackboard several polynomials of degree 37 are written, each of them having leading coefficient equal to 1 and all coefficients nonnegative.
It is allowed to erase any pair of polynomials f, g and replace it by another pair of polynomials f_1, g_1 of degree 37 with leading coefficients to 1 such that either $f_1 + g_1 = f + g$ or $f_1 g_1 = fg$.
Can we reach a blackboard on which all polynomials have 37 distinct positive roots?

Walkthrough. Let
$$f = X^{37} + a_1 X^{36} + \ldots + a_{37}, \qquad g = X^{37} + b_1 X^{36} + \ldots + b_{37},$$
$$f_1 = X^{37} + c_1 X^{36} + \ldots + c_{37}, \qquad g_1 = X^{37} + d_1 X^{36} + \ldots + d_{37}.$$

1. Show that regardless of if we have $f_1 + g_1 = f + g$ or $f_1 g_1 = fg$, we will always have $a_1 + b_1 = c_1 + d_1$.
2. Show that this implies the sum of the coefficients of X^{36} of fg or $f + g$ is invariant.
3. Show that at every step, one of the two polynomials will have a nonnegative coefficient for X^{36}.
4. Use Vieta's to finish.

Fact 9. If we have more than one option as to what to turn the objects into (e.g. the ToT 2016 problem), it is often good to find a way to find an invariant that works for all options.

The following is not necessarily hard, but realizing the weighting is nontrivial.

Example 10
The first quadrant is divided into unit squares. We are allowed to perform the following move: if the square (x, y) has a token, while $(x, y+1), (x+1, y)$ are empty, then we take the token on (x, y) and put a token on each of the other two squares.

Initially, we have tokens on $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)$. Can we clear these six squares by a sequence of moves?

Walkthrough. Assign the weight $\frac{1}{2^{x+y}}$ to the cell (x, y) if there is a token at (x, y) , and assign it a weight of 0 otherwise, for all positive integers x, y.

1. Prove that the sum of all the weights in the first quadrant is invariant. Furthermore, show that the sum is $\frac{11}{16}$.
2. If none of the six initial squares have a token, then what is the maximum sum of all weights? (Hint: maximum is achieved when we put weights in every eligible location.)
3. Show that this maximum sun can never equal $\frac{11}{16}$, contradiction.

Fact 11. Sometimes ***weighting*** is important for invariant questions, especially grid problems.

In general, when there's symmetry, attempt to weight the objects.

Example 12 (Russia 2014)
The polynomials $X^3 - 3X^2 + 5$ and $X^2 - 4X$ are written on the blackboard. If the polynomials $f(X)$ and $g(X)$ are written on the blackboard, we are allowed to write down the polynomials $f(X) \pm g(X), f(X) \cdot g(X), f(g(X))$ and $c \cdot f(X)$, where c is an arbitrary real constant. Can we write a nonzero polynomial of form $X^n - 1$ after a finite number of steps?

Walkthrough.

1. Show that if f' and g' have a common root z, then z is a common root of $(f \pm g)', (cf)', (f \cdot g)'$ and $(f \circ g)'$.
2. Find the common root of the derivatives of the initial two polynomials.
3. Show that the derivative of $X^n - 1$ cannot have a root of 2.

Example 13 (RMM SL 2016)
Start with any finite list of distinct positive integers. We may replace any pair $n, n+1$ (not necessarily adjacent in the list) by the single integer $n-2$, now allowing negatives and repeats in the list. We may also replace any pair $n, n+4$ by $n-1$. We may repeat these operations as many times as we wish. What is the most negative integer which can appear in a list?

Walkthrough. We'll try to artificially create an invariant.

1. Let ω be a solution to $x^n + x^{n+1} = x^{n-2}$. Show that it is also a solution to $x^n + x^{n+4} = x^{n-1}$. (Hint: divide by x^n.)

2. In any list, give the number n a weight of ω^n for any n appearing in that list. Show that the sum of the weights in the list at any step is invariant.

3. Show that
$$\sum_{n\in\mathbb{L}} x^n \leq x^{-4}.$$

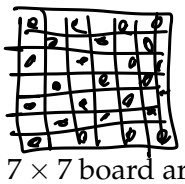
4. Show that the above step implies there can't be any n's on the LHS that are less than or equal to -4.

5. Show that -3 can appear in a list.

Remark 14. The invariant in this problem is similar to the one in Conway's soldiers. The motivation behind this is ***recursion***, then transfer it to a ***characteristic polynomial***. Note that this is again a weighting problem.

Fact 15. For most invariant/monovariant questions, it is pretty easy to identify if the answer is yes or no (otherwise it wouldn't be a invariant/monovariant question!). The hard part is **proving** why your claim is true.

4 Problems



• ungerade ↯

4.1 Appetizer

Problem 1. The cells of a 7×7 board are chess-painted (alternating colors) so that the corners are black. One is allowed to repaint any two adjacent cells to the opposite color. Is it possible to repaint the entire board white using such operations?

Summe - # Zahlen invariant $\leq 190 = \frac{19 \cdot 20}{2}$ $\rightsquigarrow$ 191

Problem 2. The numbers $1, 2, \ldots, 20$ are written on the board. One is allowed to erase any two numbers a and b and instead write the number $a + b - 1$. What number can remain on the board after 19 such operations?

Problem 3. Given a 1000-digit number with no zeroes, prove that from this number you can delete several (or none) last digits so that the resulting number is not a natural power less than 500 (a^1 is not considered a power).

Problem 4. The numbers 1 through 1000 are written on the board. One is allowed to erase any two numbers and and write the numbers ab and $a^2 + b^2$ instead. Is it possible with such operations to ensure that among the numbers written on the board, there are 700 at least that are the same?

Problem 5. Initially we have the numbers $\frac{49}{1}, \frac{49}{2}, \ldots, \frac{49}{97}$ on a board. A move consists in replacing two numbers, say a and b, with $2ab - a - b + 1$. After a series of moves, there is only one number left on the board. Find it!

4.2 Entree

$\frac{p}{q} \rightarrow \frac{2p+q}{q}$ $\frac{p}{p+2q}$

Problem 6 (Russia 2008). A natural number is written on the blackboard. Whenever a number x is written, one can write either the number $2x + 1$ or $\frac{x}{x+2}$. At some point the number 2008 appears on the blackboard. Show that it was there from the beginning.

(1,1), (0,2), (2,0), (3,2), (1,5)

Problem 7 (Saint Petersburg 2020). The points $(1, 1), (2, 3), (4, 5)$ and $(999, 111)$ are marked in the coordinate system. If points (a, b) are marked then (b, a) and $(a - b, a + b)$ can be marked. If points (a, b) and (c, d) are marked then so can be $(ad + bc, 4ac - 4bd)$. Can we, after some finite number of these steps, mark a point belonging to the line $y = 2x$?

Problem 8 (Tuymaada Junior 2018). The numbers $1, 2, 3, \ldots, 1024$ are written on a blackboard. They are divided into pairs. Then each pair is wiped off the board and non-negative difference of its numbers is written on the board instead. 512 numbers obtained in this way are divided into pairs and so on. One number remains on the blackboard after ten such operations. Determine all its possible values.

$a, b \rightsquigarrow |a - b|$

$xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$

4.3 Dessert

$\frac{2x+2y}{xy} = 2\frac{x+y}{xy} \ge 2\frac{x+y}{\frac{(x+y)^2}{4}} = \frac{8}{x+y}$

Full yet?

Problem 9. The numbers $1, 2, \ldots, n$ are written on a blackboard. Each minute, a student goes up to the board, chooses two numbers x and y, erases them, and writes the number $2x + 2y$ on the board. This continues until only one number remains. Prove that this number is at least $\frac{4}{9}n^3$.

Problem 10. Let n be a fixed positive integer. Initially, n 1's are written on a blackboard. Every minute, David picks two numbers x and y written on the blackboard, erases them, and writes the number $(x + y)^4$ on the blackboard. Show that after $n - 1$ minutes, the number written on the blackboard is at least $2^{\frac{4n^2-4}{3}}$.

$\frac{(x+y)^4}{xy} \ge \frac{(x+y)^4}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = 4(x+y)^2$

Problem 11 (USAMO 2019/5). Two rational numbers $\frac{m}{n}$ and $\frac{n}{m}$ are written on a blackboard, where m and n are relatively prime positive integers. At any point, Evan may pick two of the numbers x and y written on the board and write either their arithmetic mean $\frac{x+y}{2}$ or their harmonic mean $\frac{2xy}{x+y}$ on the board as well. Find all pairs (m, n) such that Evan can write 1 on the board in finitely many steps.

Problem 12 (Russia 2017). Initially a positive integer n is on the blackboard. Every minute we are allowed to take a number a on the blackboard, erase it and write instead all divisors of a except for a. After some time there are n^2 numbers on the blackboard. For which n is this possible?

Problem 13 (Iran RMM TST 2020). A 9×9 table is filled with zeroes. At every step we can either take a row, add 1 to every cell and shift it one unit to the right (the rightmost number in that row ends up in the leftmost position of the row) or take a column, subtract 1 from every number on that column and shift it one cell down (with the same convention as for rows). Can the table with the top right -1 and bottom left $+1$ and all other cells zero be reached?

5 Selected Solutions

5.1 Solution 1 (ISL 1989)

The following solution is by Pranav Sriram:

Note that in each move, we are adding the same number to 2 squares, one of which is white and one of which is black (if the chessboard is colored alternately black and white). If S_b and S_w denote the sum of numbers on black and white squares, respectively, then $S_b - S_w$ is an invariant. Thus if all numbers are 0 at the end, $S_b - S_w = 0$ at the end and hence $S_b - S_w = 0$ in the beginning as well. Thus, this condition is necessary; now we prove that it is sufficient.

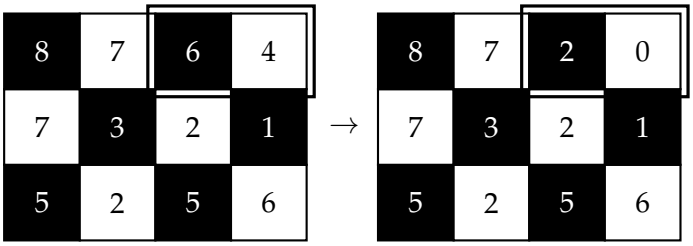


Figure 1: A move on the $m \times n$ board

Suppose a, b, c are numbers in cells A, B, C respectively, where A, B, C are cells such that A and C are both adjacent to B. If $a \leq b$, we can add $(-a)$ to both a and b, turning a to 0. If $a \geq b$, then add $a - b$ to b and c. Then b becomes a, and now we can add $-a$ to both of them, making them 0. Thus we have an algorithm for reducing a positive integer to 0. Apply this in each row, making all but the last 2 entries 0. Now all columns have only zeroes except the last two. Now apply the algorithm starting from the top of these columns, until only two adjacent nonzero numbers remain. These two numbers must be equal since $S_b = S_w$. Thus we can reduce them to 0 as well.

5.2 Solution 2 (ELMO 1999)

Let us take mod 5 of $x + y$. Note that since

$$\begin{aligned} 3x - 2y &\equiv 3(x + y) \pmod 5, \\ -2x + 3y &\equiv 3(x + y) \pmod 5, \\ x + 1 + y + 4 &\equiv x + y \pmod 5, \\ x - 1 + y - 4 &\equiv x + y \pmod 5, \end{aligned}$$

the sum of the two coordinates is either constant or multiplied by 3. Thus, $(0, 0)$ cannot be achieved.

5.3 Solution 3 (ISL 2014)

Consider the product P of the numbers on the sheets. Say we choose a, b and replace them by $a + b, a + b$. The quotient between the product of all numbers after the operation and the one before the operation is $\frac{(a+b)^2}{ab}$, which by AM-GM is greater than or equal to 4. Thus, the product is at least $4^{n \cdot 2^{n-1}}$, and by AM-GM again, we get that the sum S is

$$\left(\frac{S}{2^n}\right)^{2^n} \geq P,$$

implying the desired result $S \geq 4^n$.

5.4 Solution 4

Note that $a+b+c+(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a)$. Thus, for every operation he does, the sum is constant, but the number of terms decreases by 1. Even more important,

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 = (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2,$$

implying the sum of squares is also invariant. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be on the blackboard. Then by Cauchy-Schwarz,

$$n(x_1^2+x_2^2\ldots+x_n^2) \geq (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Taking into account our two invariants, we obtain

$$n \geq \frac{(1+2+\ldots+2008)^2}{1^2+2^2+\ldots+2008^2} = 1506+\frac{502}{1339},$$

implying this can take place at most $2008-1506 = 502$ times, which is less than 600 seconds, or 10 minutes.

5.5 Solution 5 (St. Petersburg 2013)

Suppose this process is endless. There exists a real number $N < 1$ such that all of the 100 initial numbers are smaller than N. If $a, b < N$, we get

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < N.$$

Thus, all numbers on the board will always be smaller than N. Denote S and P as the sum and product, respectively, of all numbers on the board. Furthermore, let S_0 and P_0 be the sum and product of the initial 100 numbers. Each move gives us $S \to S-b$ and $P \to \frac{P}{a} > \frac{P}{N}$. After M moves, we get that $S < S_0$ and $P > \frac{P_0}{N^M}$. By AM-GM, we get $S \geq 100\sqrt[100]{P}$. This gives us a contradiction for sufficiently large M, implying the desired result.

5.6 Solution 7 (ISL 2012)

Clearly the maximum number on the board does not change, say it was M initially. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be the numbers on the board. I claim the quantity

$$S = a_1+2a_2+\ldots+ka_k+\ldots+na_n$$

always increases. Say that at some moment $x > y$ with x to the left of y and x in position i. The difference between the new value of S and the old one is either

$$i(y+1)+(i+1)x-(ix+(i+1)y) = x-y+i \geq 1$$

or

$$i(x-1)+(i+1)x-(ix+(i+1)y) = -i+(i+1)(x-y) \geq -i+i+1 = 1,$$

proving the claim and the desired result.

5.7 Solution 8 (ToT 2016)

Suppose that

$$(X^{37}+a_1X^{36}+\ldots+a_{37})(X^{37}+b_1X^{36}+\ldots+b_{37})$$
$$=(X^{37}+c_1X^{36}+\ldots+c_{37})(X^{37}+d_1X^{36}+\ldots+d_{37}).$$

Looking at the coefficient of X^{36+37} we obtain

$$a_1+b_1=c_1+d_1.$$

This also holds if

$$(X^{37}+a_1X^{36}+\ldots+a_{37})+(X^{37}+b_1X^{36}+\ldots+b_{37})$$
$$=(X^{37}+c_1X^{36}+\ldots+c_{37})+(X^{37}+d_1X^{36}+\ldots+d_{37}).$$

Thus, the sum of coefficients of X^{36} is invariant. Since initially all coefficients are nonnegative, at each step the sum of coefficients of X^{36} stays nonnegative. This implies that at least one polynomial, say $P(X)=X^{37}+a_1X^{36}+\ldots+a_{37}$, has $a_1\geq 0$ at every step. If $x_1,x_2,\ldots,x_{37}$ are the complex roots of P, then

$$x_1+x_2+\ldots+x_{37}=-a_1\leq 0.$$

Thus, the polynomial cannot have 37 positive roots, which implies the desired result.

5.8 Solution 10

Consider the sum of $\frac{1}{2^{x+y}}$ over all pairs (x,y) for which there is a token at (x,y). Thus,

$$\frac{1}{2^{x+(y+1)}}+\frac{1}{2^{(x+1)+y}}=\frac{1}{2^{x+y}},$$

implying the sum is invariant. Initially, the sum is

$$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}=\frac{11}{16}.$$

Suppose that at some moment the six initial squares have no token. Then the sum is at most

$$\sum_{x,y\geq 1}\frac{1}{2^{x+y}}-\frac{11}{16}=1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16},$$

which is a contradiction, proving the desired result.

5.9 Solution 12 (Russia 2014)

Let $f(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, then its derivative is

$$f'(x)=a_1+2a_2X+\ldots+na_nX^{n-1}.$$

This satisfies all conditions, because

$$(f\pm g)'=f'\pm g',$$
$$(cf)'=cf',$$
$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f,$$
$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'.$$

Thus, if f' and g' have a common root z, then z is a common root of $(f\pm g)', (cf)', (f\cdot g)'$ and $(f\circ g)'$. The derivatives of the initial polynomials are $3X^2-6X$ and $2X-4$, and 2 is a common root. However, $(X^n-1)'=nX^{n-1}$ does not have the root $X=2$, implying we can never get X^n-1.

5.10 Solution 13 (RMM SL 2016)

Let's look for an invariant of the form $\sum_{n\in\mathbb{L}} x^n$, where $\mathbb{L}$ is a subset of $\mathbb{Z}$. To have an invariant, we want

$$x^n + x^{n+1} = x^{n-2},$$
$$x^n + x^{n+4} = x^{n-1},$$

for all n. This reduces to

$$x^2 + x^3 = 1,$$
$$x^5 + x = 1,$$

which is easily solvable since they are secretly the same equation, because

$$x^5 + x - 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1).$$

Thus, we choose ω such that $\omega^3 + \omega^2 = 1$ and get $\sum_{n\in\mathbb{L}} \omega^n$ is constant, where $\mathbb{L}$ is the list at any step. Thus,

$$\sum_{n\in\mathbb{L}} \omega^n \le \sum_{n\ge 1} \omega^n = \frac{\omega}{1-\omega} = \omega^{-4}.$$

This must be true for all steps, and since $0 < \omega < 1$, we know that $n > -4$. Working backwards from -3, we find that an initial list of $1, 2, 3, 4, 5$ will generate -3, implying $\boxed{-3}$ works.

Aufgabe 20 (MEMO 2016). Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-entarteten und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a+b-c$, $b+c-a$ und $c+a-b$ zu ersetzen. Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.

$b = c$

$a \quad \longrightarrow \quad a+b-c \quad > a$

$b \quad \longrightarrow \quad b+c-a \quad < c$

$c \quad \longrightarrow \quad c < c+a-b \quad < a$

$a \geq b \geq c$

$x^2 \quad (x+1)(x-1)$

$x^2 \geq x^2 - 1$

Invariante: Die Summe der Zahlen bleibt immer gleich

Nach AM-GM ist Produkt $\leq \left(\frac{\text{Summe}}{n}\right)^n$

$$a_1 \cdots a_n \quad \xrightarrow{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}} \quad \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 1$$

Betrachte $S = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$

Behauptung: S ist monoton $\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}$

Wenn wir die Zahlen a, b, c auswählen, dann verändert sich S um

$$-a^2 - b^2 - c^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (a+c-b)^2$$

$$= -a^2 - b^2 - c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$

$$= (a-c)^2 + (b-c)^2 + (a-b)^2 > 0$$

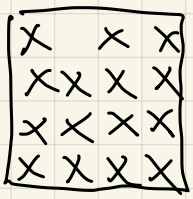
Aufgabe 19 (Baltic Way 2017)**.** Ein Springer beim Schach hat ein verletztes Bein und humpelt. Daher macht er abwechselnd einen normalen Springerzug und einen kurzen Zug, bei dem er auf ein diagonal benachbartes Feld zieht. Der Springer bewegt sich auf einem (5×6)-Brett und beginnt mit einem normalen Zug. Wie viele Züge kann er höchstens machen, wenn er das Ausgangsfeld frei wählen kann und kein Feld (auch nicht das Ausgagngsfeld) mehr als einmal betreten darf?



6 × 6

18 schwarze

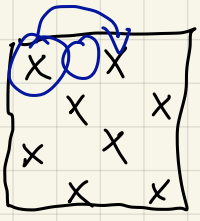
16 weiße

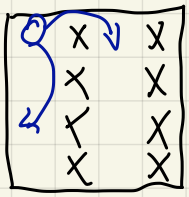


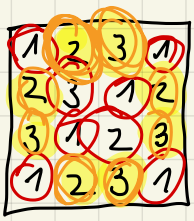
klappt

Aufgabe 18 (Baltic Way 2017). Auf einem (4×4)-Spielbrett sind 15 Spielsteine auf 15 verschiedenen Feldern platziert. Das 16. Feld ist leer. Befinden sich zwei Steine auf benachbarten Feldern (d.h., Feldern mit einer gemeinsamen Seite), dann kann man mit einem der Steine über den anderen auf dessen gegenüberliegendes Nachbarfeld springen, sofern dieses leer ist. Der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen. Für welche Anfangspositionen des leeren Feldes ist es möglich, dass sich am Ende nur noch ein Stein auf dem Spielbrett befindet.

Das leere Feld darf nicht bei Farbe 1 sein

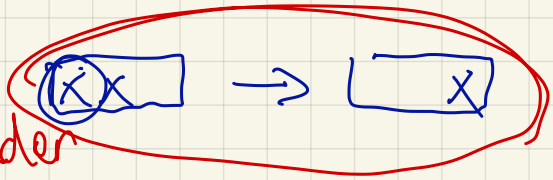






6 x 1
5 x 2
5 x 3

Durch Symmetrie gehen auch die anderen Felder in der Mitte nicht



1, 2 verschwinden 3 kommt hinten

1, 3 2

2, 3 1

Pro Zug werden zwei der drei Werte #1, #2, #3 mit Steinen um 1 verkleinert, der dritte um 1 erhöht.

$(5,5,5) \to (4,4,6) \to (5,3,5)$ mod 2

$\to (4,4,4) \to (3,5,3) \to (2,6,2)$

$\to (3,5,1) \to (2,4,2) \to (3,5,1)$

$(1,1,0) \to (0,0,1)$

$(0,1,0)$

$(1,0,0)$

Example 3 (ISL 2014)

The number 1 is written on each of 2^n sheets of paper. Each minute we are allowed to choose two distinct sheets, erase the two numbers a and b appearing on them and writing the number $a+b$ instead on both sheets. Prove that after $n2^{n-1}$ minutes the sum of the numbers on all sheets is at least 4^n.

Example 2 (ELMO 1999)
Jimmy moves around on the lattice point. From points (x, y) he may move to any of the points $(y, x), (3x, -2y), (-2x, 3y), (x+1, y+4)$ and $(x-1, y-4)$ show that if he starts at $(0, 1)$ he can never get to $(0, 0)$.

Example 10

The first quadrant is divided into unit squares. We are allowed to perform the following move: if the square (x, y) has a token, while $(x, y+1), (x+1, y)$ are empty, then we take the token on (x, y) and put a token on each of the other two squares.

Initially, we have tokens on $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$. Can we clear these six squares by a sequence of moves?

FrüAk 2023

Ungleichungen

1 Einleitung

Ungleichungen gehören neben Geometrieaufgaben, Zahlentheorieaufgaben, kombinatorischen Problemen und Funktionalgleichungen zu den häufigsten Aufgabentypen in fortgeschrittenen mathematischen Wettbewerben.
Ungleichungen lassen sich ebenso wie Gleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen umformen, wobei sich das Ungleichheitszeichen beim Multiplizieren mit oder Teilen durch negative Zahlen ebenso wie bei der Kehrwertbildung umkehrt.
Die Grundidee beim Lösen von Ungleichungen ist meistens, diese durch Umformungen auf eine bekannte Ungleichung wie die Mittelungleichung oder die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung zurückzuführen. Dabei benötigt man meistens clevere Substitutionen und ein hohes Maß an Intuition, weshalb der einzige Weg, Ungleichungen effizient lösen zu lernen, ist, so viele Ungleichungen wie möglich zu lösen.
Löst man Ungleichungen in fortgeschrittenen Wettbewerben, so erfordert die Lösung der Ungleichung häufig nicht nur intelligente Substitutionen und das (oft mehrmalige) Anwenden von Standardungleichungen, sondern es werden auch fortgeschrittene Ungleichungen wie Muirhead, Chebychev, Jensen oder Karamata sowie analytische Fähigkeiten benötigt. Diese Einheit soll jedoch nur einen Einstieg in dieses Format der Wettbewerbsaufgaben ermöglichen, daher werden nur die am häufigsten vorkommenden Ungleichungen nichtnegatives Quadrat, Cauchy-Schwarz und QM-AM-GM-HM gemeinsam mit vielen Anwendungsaufgaben vorgestellt.

2 Die triviale Ungleichung (nichtnegatives Quadrat)

Lemma. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 \geq 0.$$

Aufgabe 2.1***.** Zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Aufgabe 2.2* Zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Aufgabe 2.3** **(QM-AM-GM-HM in zwei Variablen).** Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Aufgabe 2.4***.** Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

gilt.

Aufgabe 2.5***.** Zeige: Ist die Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck nicht größer als 1, so ist seine Fläche nicht größer als $\frac{1}{4}$.

3 QM-AM-GM-HM

Satz. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

Dabei bezeichnen wir $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$ als *quadratisches Mittel*, $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ als *arithmetisches Mittel*, $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ als *geometrisches Mittel* und $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$ als *harmonisches Mittel* der Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$.
In der obigen Ungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn $x_1 = x_2 = ... = x_n$ gilt.
Beweisidee: Der Beweis der allgemeinen QM-AM Ungleichung

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

funktioniert durch wiederholte Anwendung von der trivialen Ungleichung analog zu Aufgabe 1.2.
Die AM-GM-Ungleichung in n Variablen

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

lässt sich dagegen mittels vollständiger Induktion aufbauend auf der AM-GM-Ungleichung in zwei Variablen zeigen. Im Induktionsschritt schließt man dabei jedoch nicht wie üblich von n auf $n+1$, sondern von n auf $2n$ und von n auf $n-1$ („Vorwärts-Rückwärts-Induktion“). Die genauen Details sind jedoch technisch und vergleichsweise schwierig. Wer den Beweis angeleitet mit Hinweisen probieren möchte, dem sei der Studienorientierungstest der Uni Bonn (https://osa.zem.uni-bonn.de/seas/sa/index.php?view=viewer) empfohlen.
Die GM-HM-Ungleichung in n Variablen lässt sich direkt auf die AM-GM-Ungleichung in n Variablen zurückführen.
Aufgabe 3.1***.** Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

gilt.
Aufgabe 3.2***.** Zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Aufgabe 3.3***.** Zeige: Sind $a, b, c > 0$ mit $a \cdot b \cdot c = 1$, dann ist

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

Aufgabe 3.4** Welchen Wert kann $2 - a - \frac{1}{2a}$ maximal annehmen?
Aufgabe 3.5***.** Seien $x, y, z > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass dann gilt:

$$\frac{x+y+z}{2} - \frac{xy}{x+y} - \frac{yz}{y+z} - \frac{xz}{x+z} \geq 0$$

4 Cauchy-Schwarz

Die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* ist eine sehr allgemeine Aussage über Vektorräume. Für Ungleichungen aus der Olympiademathematik ist jedoch der reelle Fall sehr interessant. Er lautet:
Satz. Sei n eine natürliche Zahl und a_1, a_2, ..., a_n und b_1, b_2, ..., b_n reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ gilt.

Beweisidee: Der Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ist relativ anspruchsvoll bzw. "tricky", allerdings lässt er sich auf simples Äusmultiplizieren und Anwenden der trivialen Ungleichungßurückführen. Wen der Beweis interessiert, der kann mich gerne ansprechen bzw. den Beweis in vielen Quellen im Internet nachsehen.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung hat folgende, in Wettbewerben sehr gerne verwendete äquivalente Formulierung, die im englischsprachigen Raum auch als **Titu's Lemma** bezeichnet wird:
Sei n eine natürliche Zahl und x_1, x_2, x_3, ..., x_n und y_1, y_2, y_3, ..., y_n reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}.$$

Aufgabe 4.1* Was muss man in die Cauchy-Schwarz-Ungleichung einsetzen, um Titu's Lemma zu erhalten?
Aufgabe 4.2* Es seien $a, b, c, d > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

gilt.
Aufgabe 4.3***.** Beweise die Dreiecksungleichung

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + ... + (a_n+b_n)^2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in \mathbb{R}$.
Aufgabe 4.4****.** Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Zeige:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Aufgabe 4.5* Seien a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n positive reelle Zahlen mit $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Zeige, dass dann

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + ... + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{2}$$

gilt.

5 Aufgaben

Aufgabe 5.1***.** Zeige, dass für $a, b, c > 0$ die Ungleichung $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ gilt.
Aufgabe 5.2***.** Seien x, y und z reelle Zahlen mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Finde den maximalen Wert, den die Summe $a + 2b + 3c$ annehmen kann. Wann wird dieser erreicht?
Aufgabe 5.3** Zeige, dass für reelle Zahlen $a, b, c > 0$ wenigstens eine der Zahlen $(a+b+c)^2 - 9ab$, $(a+b+c)^2 - 9bc$ bzw. $(a+b+c)^2 - 9ac$ nicht negativ ist.
Aufgabe 5.4****.** Sei $a + b + c = 1$. Zeige die Ungleichung

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

Aufgabe 5.5******.** Zeige für $a, b, c, d > 0$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

Aufgabe 5.6*****.** Seien $x, y, z > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass dann gilt

$$4(x^3+y^3+z^3+3) \geq 3(x+1)(y+1)(z+1)).$$

Für welche Werte von x, y, z gilt Gleichheit?
Aufgabe 5.7*** **(Nesbitt-Ungleichung).** Beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$$

gilt.
Aufgabe 5.8**** Beweise die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

für alle reellen Zahlen $a, b, c \geq 0$.
Aufgabe 5.9*****.** Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass daraus

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

folgt.
Aufgabe 5.10**** Es seien $a, b, c > 0$ mit $a + b + c = 3$. Zeige, dass dann gilt

$$a\sqrt{3a+b} + b\sqrt{3b+c} + c\sqrt{3c+a} \leq 9.$$

Aufgabe 5.4****.** Sei $a+b+c=1$. Zeige die Ungleichung

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq\sqrt{21}.$$

Ohne Jensen. AM $\leq$ QM

$$\frac{\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}}{3} \leq \sqrt{\left(\frac{(4a+1)+(4b+1)+(4c+1)}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{3\cdot 7} = \sqrt{21}$$

Cauchy - Schwarz - Ungleichung

$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4$

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \dots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n\right)^2$$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle \geq \langle a, b\rangle \langle a, b\rangle$

↖ CS

Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$a_1 = \lambda b_1, \; a_2 = \lambda b_2, \; \dots, \; a_n = \lambda b_n$

Lemma von Titu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}.$$

$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$

Da $\sum_{i=1}^{n} y_i > 0$

$$\Leftarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$\frac{x_i}{\sqrt{y_i}} = \lambda \sqrt{y_i}$

$x_i = \lambda y_i$

$a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$

$b_i = \sqrt{y_i}$

Aufgabe 4.2* Es seien $a, b, c, d > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

gilt.

Titu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}.$$

$$\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{a+b+c+d}$$

Titu

CS:

$$\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \geq \langle a, b\rangle^2$$

Aufgabe 4.3*. Beweise die Dreiecksungleichung

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2}$$

für $n\in\mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\in\mathbb{R}$.

Titu

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}.$$

CS:

$\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\geq\langle a,b\rangle^2$

Erlaubt weil jeweils beide Seiten nicht-neg sind

Quadrieren

$$\Leftrightarrow\quad a_1^2+\cdots+a_n^2+2\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots b_n^2}+b_1^2+\cdots+b_n^2$$

$$\geq (a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2$$

$$=(a_1^2+2a_1b_1+b_1^2)+\cdots+(a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}\geq 2a_1b_1+\cdots+2a_nb_n$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\geq a_1b_1+\cdots+a_nb_n \qquad \text{CS}$$

Aufgabe 4.4****.** Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Zeige:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

$$2 \cdot \left(\frac{1^2}{x+y} + \frac{1^2}{y+z} + \frac{1^2}{z+x} \right) \geq 2 \frac{(1+1+1)^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{2 \cdot 9}{2(x+y+z)}$$

$$= \frac{9}{x+y+z}$$

$$\frac{\sqrt{2}^2}{x+y} + \frac{\sqrt{2}^2}{y+z} + \frac{\sqrt{2}^2}{z+x} \geq \frac{[3 \cdot \sqrt{2}]^2}{2(x+y+z)} = \frac{9}{x+y+z}$$

Titu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}.$$

CS:

$$\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle \geq \langle a, b \rangle^2$$

Aufgabe 5.7*** **(Nesbitt-Ungleichung).** Beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$$

gilt.

Titu

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}.$$

CS:

$$\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\geq\langle a,b\rangle^2$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+a}\geq\frac{(1+1+1)^2}{2(a+b+c)}=\frac{9}{2(a+b+c)}$$

(Titu)

(erlaubt, weil $a+b+c>0$)

$$\Leftrightarrow\quad\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{b+a}\geq\frac{3}{2}+3$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{b+a}+1\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{b+a}\right)\geq\frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{b+a}{a+b+c}}=\frac{3}{2}$$

AM HM

(Titu)

$$\frac{\sqrt{a}^2}{b+c}+\dots+\frac{\sqrt{c}^2}{b+a}\geq\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{2(a+b+c)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}$$

Aufgabe 5.9*****.** Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass daraus

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

folgt.

Aufgabe 5.5******.** Zeige für $a, b, c, d > 0$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

Seien $n \geqslant 2$ eine ganze Zahl und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit

(a) $x_j > -1$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Zeige die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

und bestimme, wann Gleichheit gilt.

$HM \leq AM \quad \forall a_1 \ldots a_n \geq 0$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geq \frac{n}{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j}}_{AM} \geq \underbrace{\frac{n}{(1+x_1)+(1+x_2)+\cdots+(1+x_n)}}_{HM} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geq \frac{n}{2}$$

2. Schritt. zu zeigen $\frac{n}{2} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$

Behauptung: $\frac{1}{2} \geq \frac{x_j}{1+x_j^2}$

$$\Leftrightarrow \quad 1+x_j^2 \geq 2x_j$$

$$\Leftrightarrow \quad x_j^2 - 2x_j + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_j - 1)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2} \leq n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \qquad \square$$

Aufgabe 2.2* Zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Als ersten Schritt, überlege warum $a^2+b^2 \geq 2ab$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ Wahr!

Zu zeigen:

$\frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0$ Wahr!

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac \geq 0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

Für alle positiven reellen x gilt $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Wann gilt Gleichheit? $x=1 \rightarrow 1 + \frac{1}{1} \geq 2$

$2 = 2$

Zu zeigen: $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad | \cdot x$

$\Leftarrow x^2 + 1 \geq 2x \quad | -2x$

$\Leftarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\Leftarrow (x-1)^2 \geq 0$ Wahr!

erlaubt, weil nach Annahme $x \geq 0$

$1 \leq 3 \quad | \cdot (-1)$

$-1 \geq -3$

Wenn man mit negativen Zahlen multipliziert, dreht sich das Ungleichzeichen um!

Gleichheit gilt, wenn $x = 1$ ist.

Aufgabe 2.4***.** Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

gilt.

$\frac{0+2}{\sqrt{0+1}} \geq 2$ ← $x = 0$

zu zeigen: $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

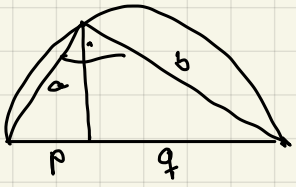
1. Möglichkeit: Forme so um, dass kein Bruch mehr da steht

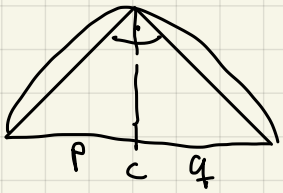
2. Möglichkeit $a + \frac{1}{a} \geq 2$ für alle positiven a

Gleichheit gilt, wenn $\sqrt{x^2+1} = 1 \iff x = 0$

Gilt hier irgendwann Gleichheit? Ja für $x = 0$.

Aufgabe 2.5*. Zeige: Ist die Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck nicht größer als 1, so ist seine Fläche nicht größer als $\frac{1}{4}$.





$1 \geq c^2 = a^2 + b^2$

$a = \sqrt{pc}$

$b = \sqrt{qc}$

$$\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt} &= \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{pqc^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{pq}\,c \\
&\leq \frac{1}{2}\,\frac{p+q}{2}\cdot c \\
&= \frac{c^2}{4} \\
&\leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau bei $p=q$ und $c=1$,

d.h. $p=q=\frac{1}{2}$ und $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 3.1***.** Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

gilt.

GM ≤ AM

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Da beide Seiten nicht-negativ $\Rightarrow$ $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Stirling-Formel $e \approx 2{,}718$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$n = 1$ $\quad 1! \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^1$ ✓

$n \to n+1$

Annahme: $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $\qquad a \leq b$

↳ zu zeigen $(n+1)! \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$

Linke Seite $\cdot (n+1)$ $\qquad$ Rechte Seite $\approx \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$ und alle Faktoren vergrößern sich leicht.

Aufgabe 3.4** Welchen Wert kann $2 - a - \frac{1}{2a}$ maximal annehmen?

$a > 0$

⚠ Ableiten ist verboten

Statt $2 - a - \frac{1}{2a}$ zu maximieren, können wir einfach $-a - \frac{1}{2a}$ maximieren. Statt dem können wir auch einfach $a + \frac{1}{2a}$ minimieren

$$a + \frac{1}{2a} \geq ?$$

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

AM ≥ GM mit Gleichheit bei $a = \frac{1}{2a}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad a + \frac{1}{2a} \geq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

⇒ Das Maximum von $2 - a - \frac{1}{2a}$ ist höchstens $2 - \sqrt{2}$

Dieses Maximum wird bei $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erreicht.

Aufgabe 3.5***.** Seien $x, y, z > 0$ reelle Zahlen. Zeige, dass dann gilt:

$$\frac{x+y+z}{2} - \frac{xy}{x+y} - \frac{yz}{y+z} - \frac{xz}{x+z} \geq 0$$

Aufgabe 5.4**. Sei $a+b+c=1$. Zeige die Ungleichung

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq\sqrt{21}.$$

$a,b,c \geq 0$

Jensen verboten



$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 \geq 4\,(abc+abd+acd+bcd)^2$$

$$\Leftarrow\quad (a^2+b^2+c^2+d^2)^3 \geq 4\,(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2c^2+a^2d^2+a^2c^2+b^2d^2)$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geq 4(b^2c^2+a^2d^2+a^2c^2+b^2d^2)$$

$$= 4(b^2+a^2)(c^2+d^2)$$

$$\Leftarrow\quad \frac{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}{2} \geq \sqrt{(b^2+a^2)(c^2+d^2)}$$

$$\sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2 \geq \left(\sum a_i b_i\right)^2$$

Muirheads Ungleichung

Definition: Sei $a=(a_1,\dots,a_n)$ eine endliche Folge und seien $x_1,\dots,x_n$ nichtnegative, reelle Variablen. Dann ist das a-Mittel von $x_1,\dots,x_n$ definiert als

$$[a_1,\dots,a_n](x_1,\dots,x_n) := \frac{1}{n!}\sum_{sym} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$ wobei

die Summe über alle $n!$ Permutationen $\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ läuft

Beispiel • $[2,1,0](x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{6}\left(x_1^2x_2^1x_3^0 + x_2^2x_1^1x_3^0 + x_1^2x_3^1x_2^0 + x_3^2x_1^1x_2^0 + x_2^2x_3^1x_1^0 + x_3^2x_2^1x_1^0\right)$

$[\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}](x_1,x_2,x_3) = \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$

- $[\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}](x_1,x_2,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}$
- $[1,0,0](x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$
- $[1,0,\dots,0](x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{1}{n!}((n-1)!x_1+(n-1)!x_2+\cdots+(n-1)!x_n)$
  $= \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$
- $[0,0,\dots,0](x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{1}{n!}(x_1^0\cdots x_n^0+\cdots) = 1$

Definition: Sei $p=(p_1,\dots,p_n)$, $q=(q_1,\dots,q_n)$ endliche Folgen nicht-negativer reeller Zahlen

Wir sagen $(p_1,\dots,p_n)$ majorisiert $(q_1,\dots,q_n)$ (abgekürzt $p\succ q$)

- $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_n$, $q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_n$
- $p_1\geq q_1$

  $p_1+p_2\geq q_1+q_2$

  $\vdots$

  $p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}\geq q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}$
- $p_1+p_2+\cdots+p_n = q_1+q_2+\cdots+q_n$

Beispiel:
- $(3,2,1)\succ(2,2,2)$
- $(1,0,\dots,0)\succ(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$
- $(4,0,0,0)\not\succ(2,2,0)$ weil nicht beide Folgen gleiche Länge haben

- $(5,0,-1) \not\succ (2,2,0)$ weil Folgenglieder ≥ 0 sein müssen
- $(2,1,1,1) \not\succ (1,1,1,1)$ weil die Summe nicht gleich ist
- $(4,1,1,1) \not\succ (3,3,1,0)$ weil $4+1 < 3+3$

Muirheads Ungleichung: Seien $x_1, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen und $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ Folgen nicht-negativer reeller Zahlen. Wenn $p \succ q$, dann $[p_1, \dots, p_n](x_1, \dots, x_n) \geq [q_1, \dots, q_n](x_1, \dots, x_n)$. Gleichheit gilt nur in den offensichtlichen Fällen, also

- wenn $p = q$
- $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Für $x, y, z > 0$. Zeige $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.

$(2,0,0) \succeq (1,1,0)$, also nach Muirhead

$$[2,0,0](x,y,z) \geq [1,1,0](x,y,z)$$

$$\frac{1}{6}\left(x^2y^0z^0 + x^2z^0y^0 + y^2x^0z^0 + y^2z^0x^0 + z^2x^0y^0 + z^2y^0x^0\right) = \frac{1}{6}(2x^2+2y^2+2z^2)$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)$$

$$[1,1,0](x,y,z) = \frac{1}{6}(2xy + 2yz + 2xz) = \frac{1}{3}(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{1}{3}(xy+xz+yz)$$

Example 1.8.6. *If a, b are positive real numbers, then*

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$\Leftrightarrow$ $a^{3/2} + b^{3/2} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = ab^{1/2} + ba^{1/2}$ Sei $x := \sqrt{a}$

$y := \sqrt{b}$

$a, b > 0$

$\Leftrightarrow$ $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$ $\quad [3/2, 0] \succeq [1, 1/2]$

$[3,0] \succeq [2,1]$

Also gilt nach Muirhead $[3,0](x,y) \geq [2,1](x,y)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(x^3 + y^3) \geq \frac{1}{2}(x^2y + y^2x)$

(IMO 1995): $a, b, c > 0$ mit $abc = 1$. Beweise

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \quad \Big| \cdot a^3(b+c)\, b^3(c+a)\, c^3(a+b)$$

$[\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}]$ $[\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}]$ $[\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}]$

$$[4,4,0](a,b,c) + 2\cdot[4,3,1](a,b,c) + [3,3,2](a,b,c)$$

$$\geq$$

$$3\cdot[5,4,3](a,b,c) + [4,4,4](a,b,c)$$

Wegen $abc = 1$ gilt $[p_1, p_2, p_3](a,b,c) = [p_1 - r, p_2 - r, p_3 - r](a,b,c)$

$$[4,4,0] = [\tfrac{16}{3}, \tfrac{16}{3}, \tfrac{4}{3}]$$

$[\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}] \succ [5,4,3]$

$[\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}] \succ [5,4,3]$

$[\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}] \succ [4,4,4]$

1998 IMO Shortlist. $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ Beweise

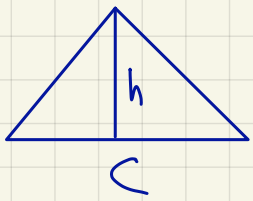
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

Exercise 1.116. (IMO, 1961) Let a, b, c be the lengths of the sides of a triangle, and let (ABC) denote its area. Prove that

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

$\Delta ABC = \frac{1}{2} h c$

$2 \cdot 0 \cdot 0 \geq 1 \cdot 1 \cdot 0$



$2(a^2+b^2+c^2) \geq ab + bc + ac$

Exercise 1.117. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

$\sum_{cyc} a(b+c)(a+b+c) \leq \frac{9}{4}(a+b)(a+c)(b+c)$

$\sum_{cyc} a(b^2+c^2+ab+ac+2bc) \leq \frac{9}{4}(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)$

$\sum ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+2abc \leq \frac{9}{4}($ $)$

$8 \sum_{sym} a^2b + 24abc \leq 9 \sum_{sym} a^2b + 18abc$

$6abc \leq \sum a^2b$

$$\binom{n}{k} \mod p = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$d^2 \mid \binom{n-1}{d-1}$ ↙3

$n \equiv 1 \cdots 5 \mod 9$

↙5 $n \equiv 1 \mod 4$

$9 \cdot 4 \mid \frac{(n-1)\cdots(n-5)}{5!}$

↖1

$\frac{p-1}{p^2}$

$p^{2k} \mid \binom{n-1}{p^k-1} = \frac{(n-1)\cdots(n-p^k+1)}{(p^k-1)!}$

$84 \mid 1024$

↙5

$16 \mid \binom{n-1}{3}$ $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ $n \equiv 1,2,3 \mod 32$ $17, 19$

↖1

4

↙10

6

$8 \mid \binom{n-1}{7}$ $\frac{(n-1)\cdots(n-7)}{7!}$

↖4

$d^2 \mid \binom{n-1}{d-1}$ $1 \mod d^2$

$\frac{d^2 \cdots (d^2-d+2)}{(d-1)!}$

$d^2 \cdot \frac{(d^2-1)\cdots(d^2-(d-2))}{(d-1)!} = \binom{d^2-1}{d-1} \frac{d^2}{(d^2-d-2)}$

$(p^k-1)!$

$2^{2k} \mid \binom{n-1}{2^k-1}$

$$v_2\left((n-1)\cdots(n-2^k+1)\right) = 2^k + k - 1$$

$$2^{2k}\cdot\ldots\cdot(2^{2k}-2^k+2)$$

$$v_2\left(\frac{k\cdot 2^{2k}}{2^k-1}\right) = v_2\left((k\cdot 2^{2k})!\right) - v_2\left((2^k-1)!\right) - v_2\left((k\cdot 2^{2k}-2^k+1)!\right)$$

$$= k\cdot 2^k - s_2(k\cdot 2^{2k}) - (2^k-1) + s_2(2^k-1) + (k\cdot 2^k - 2^k - 1)\cdots$$

$$= -s_2(k\cdot 2^k) + k + s_2\left((k\cdot 2^k-1)2^k+n\right)$$

$$= -s_2(k) + k + s_2(k\cdot 2^k-1) + 1$$

$$= -s_2(k) + k + s_2(k-1) + k + 1$$

$$\geq 2k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}\cdot\frac{n}{n-k}$$

$$\binom{kd^2}{d} = \frac{(kd^2)\cdots(kd^2-d+1)}{d!}$$

$$\binom{kd^2}{d-1}\cdot\frac{kd^2-d+1}{d}$$

$$\binom{kd^2-1}{d-1} = \frac{(kd^2-1)\cdots(kd^2-d+1)}{(d-1)!}$$

$$\binom{kd^2}{d-1} = \frac{(kd^2)\cdots(kd^2-d+1)}{(d-1)!} = \binom{kd^2-1}{d-1}\frac{(kd^2)}{kd^2-d+1}$$

Sei $x,y,z > 0$ mit $xyz = 1$. Zeige

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

$$[4,0,0] = \frac{1}{6}\left(x^4 + x^4 + y^4 + y^4 + z^4 + z^4\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(x^4 + y^4 + z^4\right)$$

$$x^0 y^0 z^0 = x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{4}{3}} z^{\frac{4}{3}} = 1 \qquad x^1 y^0 z^0 = x^2 y^1 z^1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3\right) \geq 3\left(1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz\right)$$

$$\Leftrightarrow 12[4,0,0] + 12[3,0,0] \geq 3[0,0,0] + 6[1,0,0] + 6[1,1,0] + 3[1,1,1]$$

$$\Leftrightarrow 4[4,0,0] + 4[3,0,0] \geq [0,0,0] + 2[1,0,0] + 2[1,1,0] + [1,1,1]$$

Wegen $xyz = 1$ ist $[0,0,0] = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

$$[1,0,0] = [2,1,1]$$

$$[1,1,0] = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

Also ist zu zeigen

$$4[4,0,0] + 4[3,0,0] \geq \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right] + 2[2,1,1] + 2\left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right] + [1,1,1]$$

Das folgt aus Muirhead, da

$(4,0,0) \succeq \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$(4,0,0) \succeq (2,1,1)$

$\left(3,0,0\right) \succeq \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$(3,0,0) \succeq (1,1,1)$

Eine Zahl n bestehe aus 600 Sechsen und einigen Nullen (in irgendeiner Reihenfolge). Kann n eine Quadratzahl sein?

$a = b^2$

a endet auf 00, 06, 60 oder 66 ← Widerspruch, da a durch 10, aber nicht durch 100 teilbar ist.

↳ dann teile durch 100

Als Quadratzahl endet a auf eine gerade Anzahl an Nullen, also

$a = 10^{2k} \cdot a'$

Dann ist a' aber eine Quadratzahl, die nicht auf 0 endet. Also endet a' auf 06 oder 66 endet. Insbesondere ist a' gerade, aber nicht durch 4 teilbar. Widerspruch!

Auf wie vielen Nullen endet 1000! ?

Eine Null am Ende entsteht, wenn die Primfaktorzerlegung eine 2 und eine 5 hat, also wenn $n = 2^a \cdot 5^b \cdot k$, dann endet n auf $\min(a,b)$ viele Nullen.

In 1000! kommt der Primfaktor 5 höchstens so häufig vor wie 2.

Da jede 5. Zahl durch 5 teilbar ist, sind $\lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$ Faktoren von 1000! durch 5 teilbar

Ähnlich sind $\lfloor \frac{1000}{25} \rfloor = 40$ Faktoren durch 25 teilbar

$\lfloor \frac{1000}{125} \rfloor = 8$ $\quad 125$

$\lfloor \frac{1000}{625} \rfloor = 1$ $\quad 625 = 5^4$

↳ $200 + 40 + 8 + 1 = 249$.

Beweise, dass es unendlich viele Zahlen der Form $5^n - 64$ gibt, die durch 1001 teilbar sind

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

Betrachte $5^n - 64 \equiv 0 \mod 7, 11$ und 13

$$5^n - 64 \equiv 5^n + 6 \mod 7$$

n	$5^n \mod 7$
1	5
2	4
3	6
4	2
5	3
6	1

Also gilt $5^n + 6 \equiv 0 \mod 7$ genau dann wenn n durch 6 teilbar ist.

11: $5^n - 64 \equiv 5^n + 2 \mod 11$

Das ist genau dann $\equiv 0 \mod 11$, wenn $5^n \equiv 9 \mod 11$ ist.

n	$5^n \mod 11$
1	5
2	3
3	4
4	9
5	1

$\Rightarrow$ $5^n \equiv 9 \mod 11$ gilt genau dann wenn

$n \equiv 4 \mod 5$ ist.

13: $5^n - 64 \equiv 5^n - 12 \equiv 5^n + 1 \mod 13$

Wir wollen, dass $5^n \equiv 12 \mod 13$

n	$5^n \bmod 13$
1	5
2	12
3	8
4	1

$\Rightarrow$ $5^n - 64$ ist genau dann durch 13 teilbar, wenn $n \equiv 2 \bmod 4$ ist.

$\Rightarrow$ Wir brauchen ~~$n \equiv 0 \bmod 6$~~ $n \equiv 0 \bmod 3$

$n \equiv 4 \bmod 5$

$n \equiv 2 \bmod 4$

Der Chinesische Restesatz sagt:

$$n \equiv k_1 \bmod m_1$$
$$n \equiv k_2 \bmod m_2$$
$$\vdots$$
$$n \equiv k_l \bmod m_l$$

hat genau eine Lösung $\bmod m_1 \cdots \cdot m_l$, wenn die m_i's teilerfremd sind.

Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 173$, sodass

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$$

Bestimme es.

Stimmt es, dass wenn n durch d^2 teilbar ist, dann ist auch $\binom{n}{d-1}$ durch d^2 teilbar?

$\binom{d^2}{d-1}$ für $d=2$ $\binom{4}{1} = 4$

für $d=3$ $\binom{9}{2} = 36$

Wir beweisen die Aussage.

$d^2 \mid n$ bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $n = k \cdot d^2$.

Zu zeigen: $\binom{n}{d-1} = \binom{k \cdot d^2}{d-1}$ ist durch d^2 teilbar.

$$\binom{k \cdot d^2}{d-1} = \frac{(k \cdot d^2) \cdot (k \cdot d^2 - 1)(k \cdot d^2 - 2) \cdots (k \cdot d^2 - d + 2)}{(d-1)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{k \cdot d^2}{d-1} = \frac{k \cdot d^2}{k \cdot d^2 - (d-1)} \underbrace{\binom{k \cdot d^2 - 1}{d-1}}_{\in \mathbb{Z}}$$

$(d+1)(d-1) = d^2 - 1$

$k \cdot d^2 - (d-1)$ und d^2 sind teilerfremd, weil

$$ggT(k \cdot d^2 - (d-1), d^2) = ggT(+(d-1), d^2)$$
$$= ggT(d-1, 1)$$
$$= 1$$

Es seien n_1 und n_2 die Nullstellen von $x^2+5x-13$.

Was ist $n_1^2+n_2^2$?

<u>Satz von Vieta:</u> Wenn n_1 und n_2 die Nullstellen von $x^2+px+q = (x-n_1)(x-n_2)$ sind, dann gilt

$p = -n_1-n_2$

$q = n_1 \cdot n_2$

$$x^2 - n_1x - n_2x + n_1n_2$$
$$= x^2 + (-n_1-n_2)x + n_1n_2$$

In unserem Fall gilt also

$5 = -n_1-n_2$

$-13 = n_1 \cdot n_2$

$$25 = (-5)^2 = (n_1+n_2)^2 = n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2$$
$$= n_1^2 + n_2^2 - 26$$

$\Rightarrow n_1^2+n_2^2 = 51$

Bestimme p und q derart, dass x^2+px+q die Nullstellen $x=3$ und $x=7$ hat.

$p = -n_1 - n_2 = -10$

$q = n_1 \cdot n_2 = 21$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 21$.

(a) Es seien p, q und n ganze Zahlen und n eine Nullstelle von x^2+px+q. Zeige, dass auch die andere Nullstelle ganz sein muss.

Sei m die andere Nullstelle. Nach Vieta gilt

$$p = -(m+n) \Rightarrow m = \underbrace{\underbrace{-n}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{-p}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

(b) Es seien p, q ganze Zahlen. Zeige, dass jede rationale Nullstelle von x^2+px+q sogar ganzzahlig sein muss.

Sei eine rationale Nullstelle $n_1 = \frac{a}{b}$. Dann gilt für die andere Nullstelle n_2

$$n_2 = \underbrace{\underbrace{-n_1}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{-p}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Q}}$$

$\Rightarrow$ Die andere Nullstelle ist auch rational, also $n_2 = \frac{a'}{b'}$

Wir können annehmen, dass a und b teilerfremd sind und dass a' und b' teilerfremd sind

$$\Rightarrow q = n_1 n_2 = \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}$$

Da q ganz ist, ist auch $\frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}$ ganz. Da a und b teilerfremd, gilt $b \mid a'$. Analog ist $b' \mid a$.

$$\Rightarrow a' = m \cdot b, \quad a = m' \cdot b'$$

$$\Rightarrow q = \frac{m' b' \cdot m \cdot b}{b \cdot b'} = m \cdot m'$$

$$p = -n_1 - n_2 = -\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}$$

$$= -\frac{ab' + a'b}{bb'}$$

Da p ganz ist, muss $ab' + a'b$ durch b teibar sein, also muss ab' durch b teibbar sein.
Da aber a und b teilerfremd sind, ist b' durch b teilbar.

$\Rightarrow b \mid b'$
Analog $b' \mid b$.
$\Big\}\ b = b'$

$$\Rightarrow p = -\frac{ab + a'b}{b \cdot b} = -\frac{a + a'}{b}$$

Da p ganz und von oben $b \mid a'$, gilt $b \mid a$.
Allerdings sind b und a teilerfremd.

$\Rightarrow b = 1$.

MEMO 2016, T-8

Wir betrachten die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ mit positiven ganzen Zahlen a, b, c. Zeige:

(a) Für $n = 2017$ gibt es keine Lösungen (a, b, c).
(b) Für $n = 2016$ muss in jeder Lösung (a, b, c) die Zahl a durch 3 teilbar sein.
(c) Für $n = 2016$ hat die Gleichung unendlich viele Lösungen (a, b, c).

(a) Mod 4 sind a^2, b^2, c^2 entweder 0 oder 1 mod 4.

$a^2 + b^2 + c^2 + 2017 = abc$

$\equiv a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abc$

Fall 0: 0 von a^2, b^2, c^2 sind 0 mod 4

↳ $a^2+b^2+c^2+1 \equiv 0 \bmod 4$ $\quad abc \equiv 1 \bmod 4$ ↯

Fall 1: 1 von a^2, b^2, c^2 sind 0 mod 4

↳ $a^2+b^2+c^2+1 \equiv 3 \bmod 4$ $\quad abc \equiv 0$ oder $2 \bmod 4$ ↯

Fall 2: 2 von a^2, b^2, c^2 sind 0 mod 4

↳ $a^2+b^2+c^2+1 \equiv 2 \bmod 4$ $\quad abc \equiv 0 \bmod 4$ ↯

Fall 3: 3 von a^2, b^2, c^2 sind 0 mod 4

↳ $a^2+b^2+c^2+1 \equiv 1 \bmod 4$ $\quad abc \equiv 0 \bmod 4$ ↯

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2016 = abc \bmod 3$ ergibt

$a^2 + b^2 + c^2 \equiv abc \bmod 3$

Sind keine der drei Zahlen durch 3 teilbar, dann ist $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \bmod 3$, aber $abc \not\equiv 0 \bmod 3$

$\Rightarrow abc \equiv 0 \bmod 3$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \equiv 0 \bmod 3 \Rightarrow a, b, c$ durch 3 teilbar.

c) Nach b) gibt es ganze Zahlen x, y, z mit $a = 3x$, $b = 3y$, $c = 3z$. Einsetzen ergibt

$$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 + 2016 = 27xyz.$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + 224 = 3xyz$$

Wir setzen $z = 1$

$$(*) \quad x^2 + y^2 + 225 = 3xy. \qquad (225 = 15^2)$$

Zu zeigen: Diese Gleichung hat unendlich viele ganze Lösungen hat.

Eine Lösung ist $(x, y) = (15, 15)$.

Wir werden zeigen, dass wenn (x_0, y_0) eine positive ganze Lösung der Gleichung $(*)$ ist mit $x_0 \leq y_0$, dann gibt es eine ganze Zahl x_1 mit $x_1 > y_0$, sodass (x_1, y_0) eine Lösung von $(*)$ ist.

Dann sind wir fertig, weil wir diesen Schritt auf beiden Seiten wiederholen können, da die Gleichung symmetrisch ist.

Wir setzen y_0 ein:

$$x^2 + y_0^2 + 225 = 3y_0 x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3y_0 x + (y_0^2 + 225) = 0$$

Die linke Seite ist ein Polynom $P(x)$.

Eine Nullstelle von $P(x)$ ist x_0. Sei x_1 die andere Nullstelle. Nach dem Satz von Vieta

$$x_0 + x_1 = 3y_0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3y_0 - x_0 \in \mathbb{Z}$$

$$x_0 \cdot x_1 = y_0^2 + 225$$

$x_1 = 3y_0 - x_0 \geq 3y_0 - y_0 = 2y_0 > y_0$ □

Beweise, dass die Gleichung

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = abc+abd+acd+bcd$$

eine Lösung (a,b,c,d) besitzt, wo a,b,c,d allesamt größer als $1000000000000000000000000000000000!$ ist.

$(1,1,1,1)$ ist eine Lösung

Sei (a_0, b_0, c_0, d_0) eine Lösung mit $1 \leq a_0 \leq b_0 \leq c_0 \leq d_0$

Mit Vieta Jumping finden wir eine Lösung (a_1, b_0, c_0, d_0)

mit $b_0 \leq c_0 \leq d_0 < a_1$

Seien x und y positive ganze Zahlen. Zeige, dass wenn $\frac{x^2+y^2+1}{xy}$ eine ganze Zahl ist, dann ist $\frac{x^2+y^2+1}{xy} = 3$

Angenommen, es gibt ein $k \neq 3$, sodass $\frac{x^2+y^2+1}{xy} = k$ eine positive, ganze Lösung (x_0, y_0) hat. O.B.d.A sei $x_0 \leq y_0$.

Behauptung: $x_0 < y_0$. Ansonsten wäre $x_0 = y_0$ und $\frac{x_0^2+y_0^2+1}{x_0 y_0} = \frac{2x_0^2+1}{x_0^2}$. Das hat nur eine ganze Lösung für $x_0 = y_0 = 1$ und $k = 3$ ↯

Wir werden zeigen, dass wenn (x_0, y_0) eine positive ganze Lösung mit $x_0 < y_0$, dann gibt es ein y_1 mit $y_1 < y_0$, sodass (x_0, y_1) eine positive ganze Lösung ist.

Betrachte das Polynom $y^2 - k x_0 y + (x_0^2+1) =: P(y)$
Es hat y_0 als Nullstelle. Sei y_1 die andere Nullstelle.

Nach Vieta gilt $y_0 + y_1 = k x_0 \Rightarrow y_1 \in \mathbb{Z}$
$y_0 \cdot y_1 = x_0^2+1 \Rightarrow y_1 > 0$

Zu zeigen $y_1 < y_0$ $\quad y_1 = \frac{x_0^2+1}{y_0}$

Wäre $y_1 \geq y_0$, dann wäre $\frac{x_0^2+1}{y_0} \geq y_0 \Rightarrow x_0^2+1 \geq y_0^2$
Widerspruch zu $x_0 < y_0$

Seien n, m und k positive ganze Zahlen mit

$\frac{n+1}{m} + \frac{m+1}{n} = k$. Zeige, dass $k \in \{3, 4\}$.

Seien a, b positive ganze Zahlen, sodass $(ab+1) \mid a^2+b^2$.

Beweise, dass $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ eine Quadratzahl ist.

Mathekalender.de

Lifting the Exponent

Definition: Sei p prim und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die p-adische Bewertung $v_p(n)$ das größte k, sodass $p^k \mid n$.

Beispiel: $v_2(2^3 \cdot 5^7) = 3$

Es gilt: $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$

$v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$

$v_2(3^{10} + 5^7) \geq 1$ $\quad v_2(3^{10}) = 0$

$v_2(5^7) = 0$

$v_5(250 \cdot 15^{14}) = v_5(250) + v_5(15^{14})$ $\quad 250 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2$

$= 3 + 14$

$= 17$

Sei p prim, $x, y \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$p \mid (x-y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y, \quad p \nmid n$$

Dann gilt $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y)$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$$

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$$

Zu zeigen: $v_p(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) = 0$

Es gilt
$$\begin{aligned} x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} &\equiv x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} && \bmod p \\ &\equiv n \cdot x^{n-1} && \bmod p \\ &\not\equiv 0 && \bmod p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= x^3 + \cancel{x^2y} - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{xy^2} + y^3 \end{aligned}$$

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \cdots + y^{n-1}) \quad \text{bei } n \text{ ungerad}$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 \end{aligned}$$

Was ist $v_2(9^5 - 5^5) = v_2(9 - 5) = 2$

Was ist $v_5(4^6 - 5^6) = 0$

Was ist $v_3(18^7 - 45^7) = v_3(9^7(2^7 - 5^7))$

$$= v_3(9^7) + v_3(2^7 - 5^7)$$
$$= 14 + v_3(2 - 5)$$
$$= 14 + 1$$
$$= 15$$

Sei p prim, $x, y \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$p \mid (x - y)$, $p \nmid x$, $p \nmid y$, $p \nmid n$

Dann gilt $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$

Lifting the Exponent - Theorem: Sei p prim, $x, y \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$p \mid (x-y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y$$

Dann gilt $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$ wenn p ungerade

$v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1$ wenn n gerade

$v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y)$ wenn n ungerade

Beispiel: $v_3(5^{18} - 2^{18}) = v_3(5-2) + v_3(18)$

$= 1 + 2$

$= 3$

Korollar: p prim, $x, y \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ungerade, sodass

$$p \mid (x+y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y.$$

Dann gilt $v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n)$.

$v_p(x^n - (-y)^n) = v_p(x - (-y)) + v_p(n)$

$= v_p(x+y) + v_p(n)$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Finde alle natürlichen Zahlen, sodass

$$3^k \mid (2^n - 1)$$

n	$2^n \bmod 3$
1	2
2	1
3	2
4	1
⋮	⋮

Wir brauchen $v_3(2^n - 1) \geq k$.

Für $k = 0$ gilt das für jedes n

Für $k \geq 1$ brauchen wir, dass n gerade ist, weil nur für gerades n ist $2^n - 1$ durch 3 teilbar. Sei also $n = 2m$. Dann gilt

$$v_3(2^n - 1) = v_3(4^m - 1^m) \overset{\text{LTE}}{=} v_3(4-1) + v_3(m)$$
$$= 1 + v_3(m).$$

$$v_3(2^n - 1) \geq k \iff 1 + v_3(m) \geq k$$
$$\iff v_3(m) \geq k - 1$$

Also gehen alle n, die gerade sind und durch 3^{k-1} teilbar sind, also alle $n = 2 \cdot 3^{k-1} \cdot s$, wobei $s \in \mathbb{N}$ beliebig.

Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass $3^n - 1$ durch 2^n teilbar ist.

matheKalender.de

Geometrie

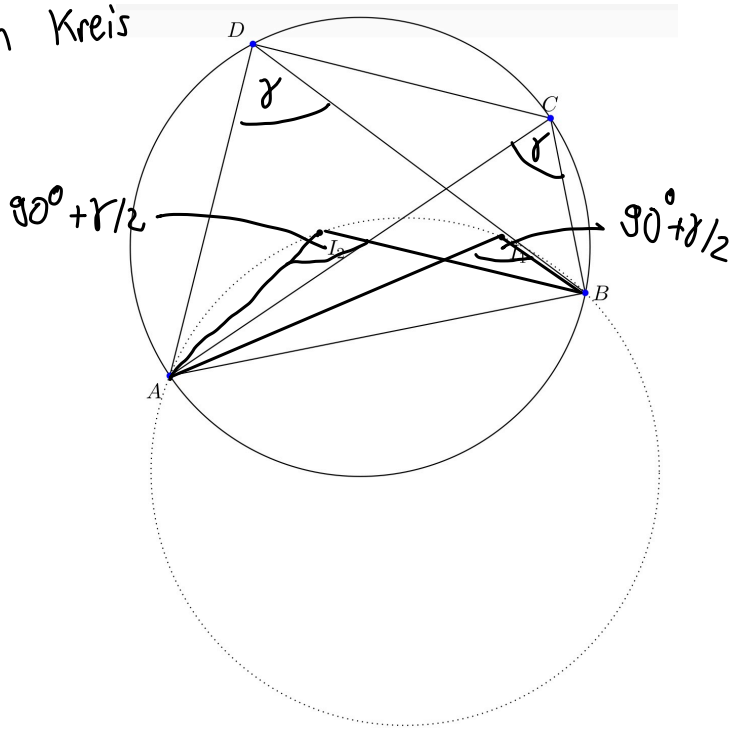
Die heutigen Abbildungen findest du auf der Kursseite auf mathe-sh.de unter „Material".

Im konvexen Sehnenviereck $ABCD$ seien I_1, bzw. I_2 die Inkreismittelpunkte von ABC, bzw. ABD.

Zeige: ABI_1I_2 ist ein Sehnenviereck.

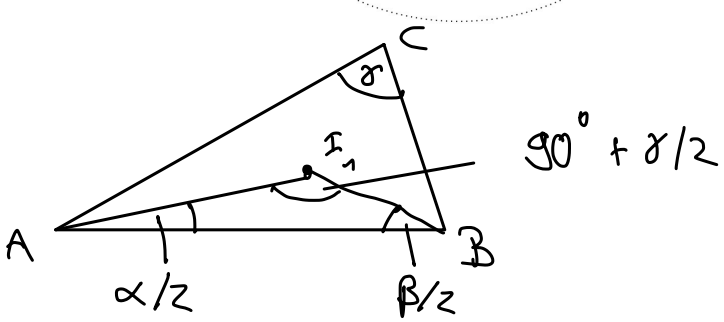
Peripheriewinkelsatz: Wenn A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen, dann gilt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$

Es gilt auch die Umkehrung, also: Wenn $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, dann liegen die vier Punkte auf einem Kreis



zu zeigen: $\sphericalangle AI_2B = \sphericalangle AI_1B$

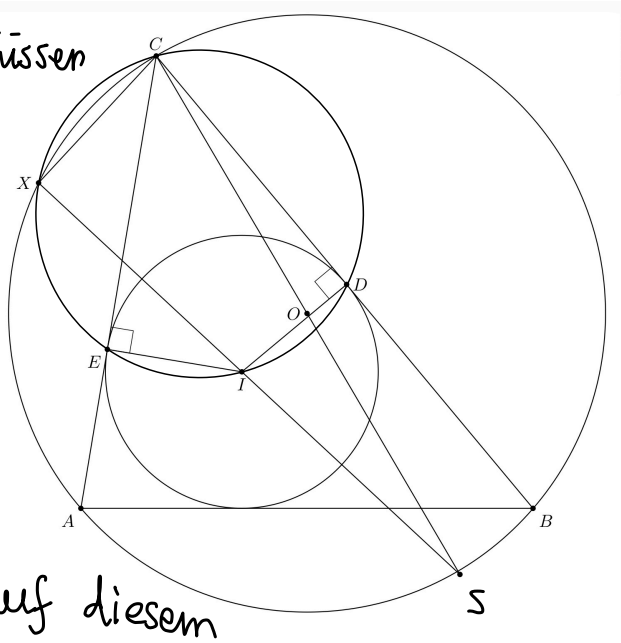
Sei $\gamma := \sphericalangle ACB$



Der Inkreis des Dreiecks ABC mit Mittelpunkt I berührt die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ in D, bzw. E. Der Umkreis des Dreiecks ABC heiße Ω, habe den Mittelpunkt O und schneide den Umkreis des Dreiecks CED außer in C nochmal in X.

Zeige: CO und XI schneiden sich auf Ω.

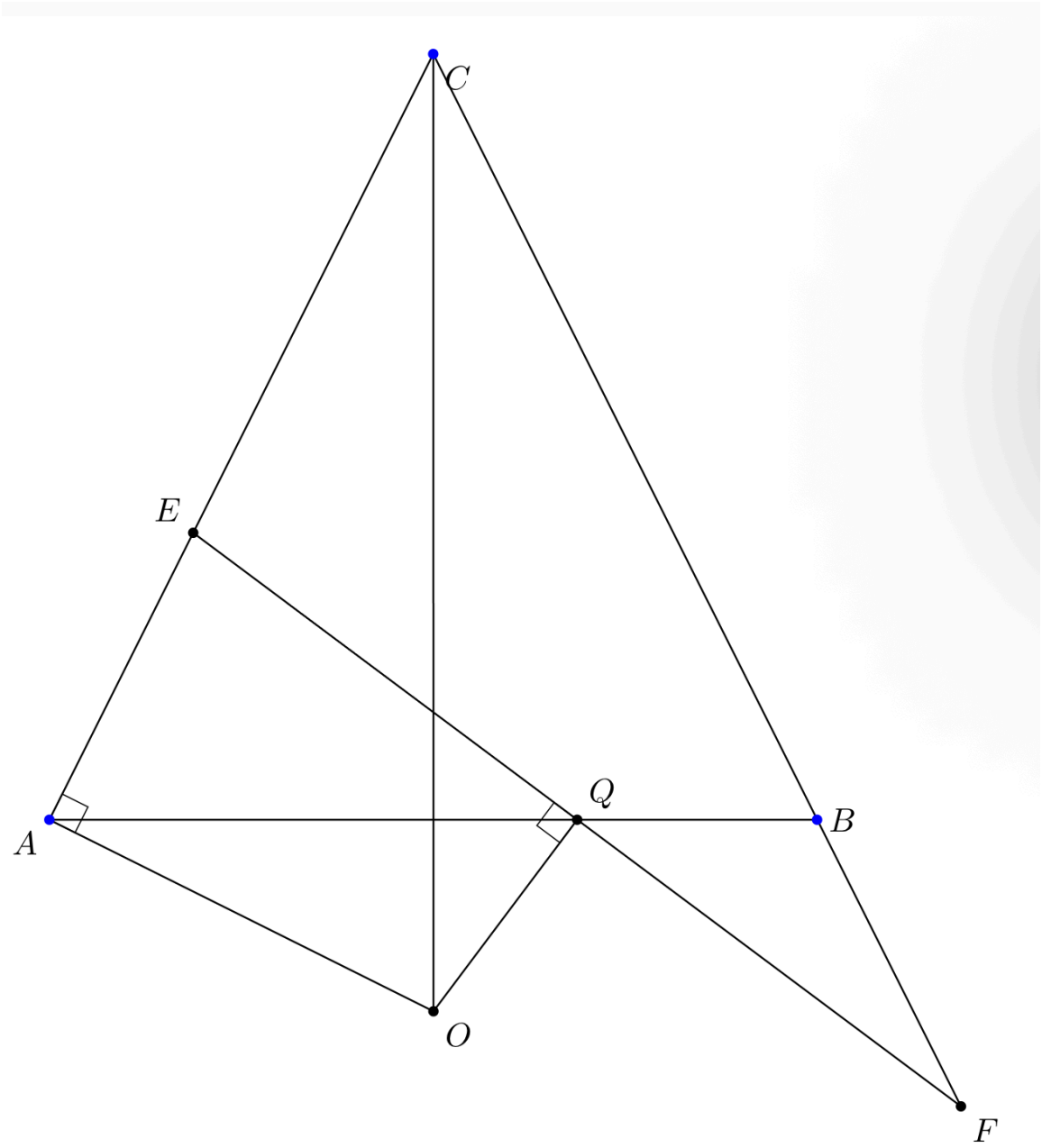
Sei S der Schnittpunkt von CO und XI.
Da O der Umkreismittelpunkt ist, müssen wir zeigen, dass $\sphericalangle CXS = 90^0$ gilt, weil dann der Umkehrung des Satz des Thales gilt, dass S auf Ω liegt.



Da $\sphericalangle IEC = \sphericalangle CDI = 90^0$, liegt I auch auf dem Umkreis von CED.
Nach Definition von X liegt auch X auf diesem Umkreis.
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\sphericalangle IXC = \sphericalangle IEC = 90^0$
somit ist $\sphericalangle SXC = \sphericalangle IXC = 90^0$.

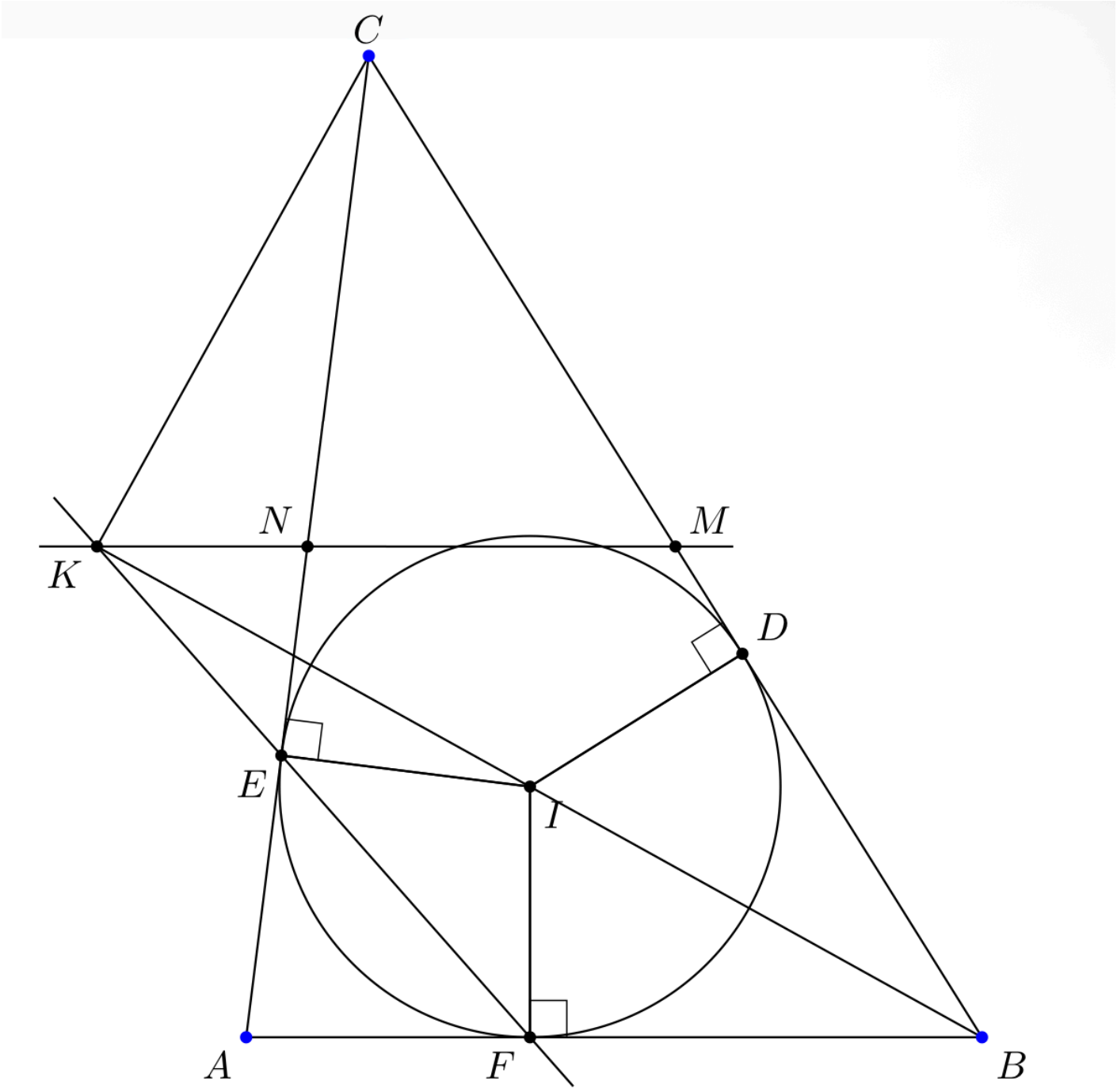
Sei M der Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC und Q ein weiterer Punkt auf $\overline{AB}$. Die Senkrechte zu AC durch A schneide CM in O. Die Senkrechte zu OQ durch Q schneide AC und BC in E, bzw F.

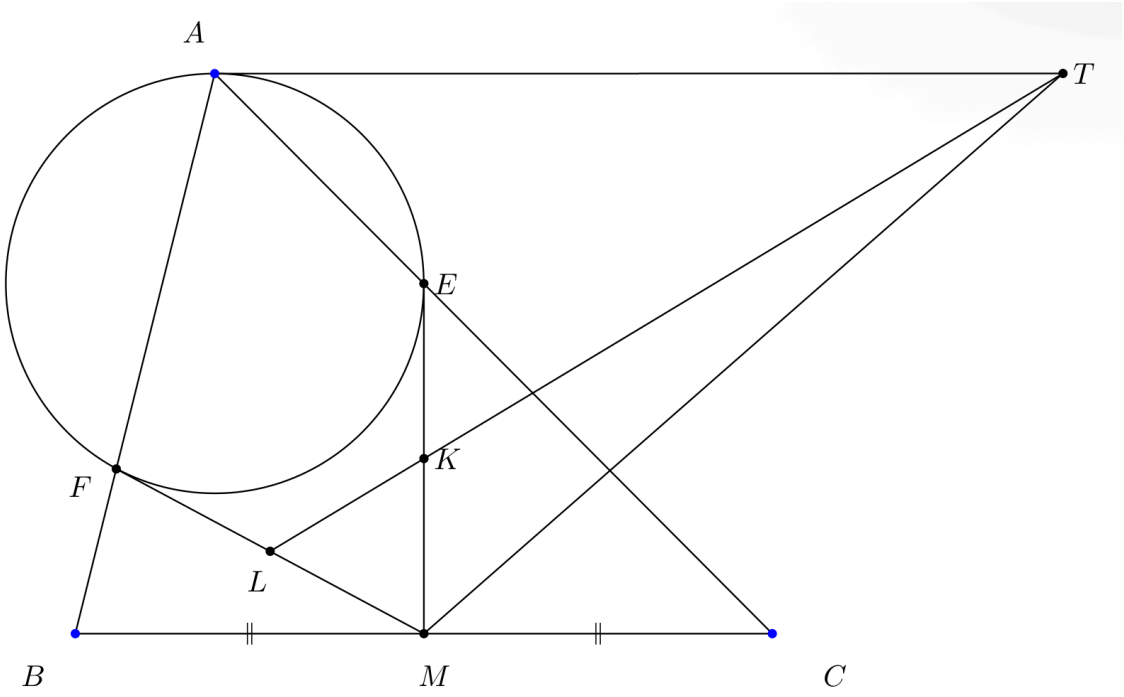
Zeige: $\overline{QE} = \overline{QF}$.



Der Inkreis des Dreiecks ABC mit Mittelpunkt I berührt die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ in D, E, bzw. F. Seien N, M die Mittelpunkte von $\overline{AC}$, bzw.$\overline{BC}$. Sei K der Schnittpunkt von BI und EF.

Zeige: $BI \perp CK$ und K liegt auf NM




A
T
E
K
F
L
B
M
C

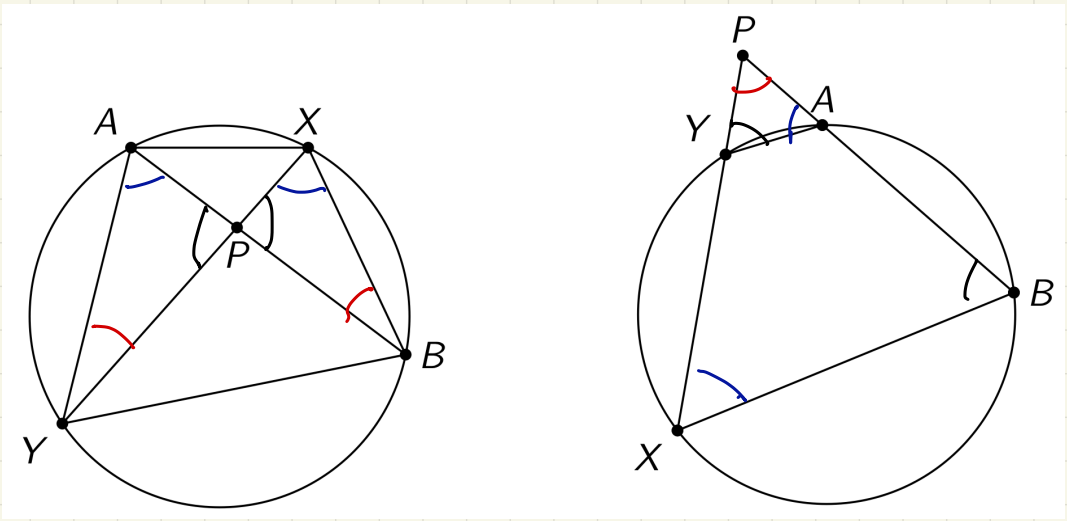
Potenzgerade

Sehnen- und Sekantensatz: Es seien A, B, X und Y Punkte auf einem Kreis, wobei AB und XY sich in einem Punkt P schneiden. Dann gilt $|PA| \cdot |PB| = |PX| \cdot |PY|$

$\triangle PBX \sim$

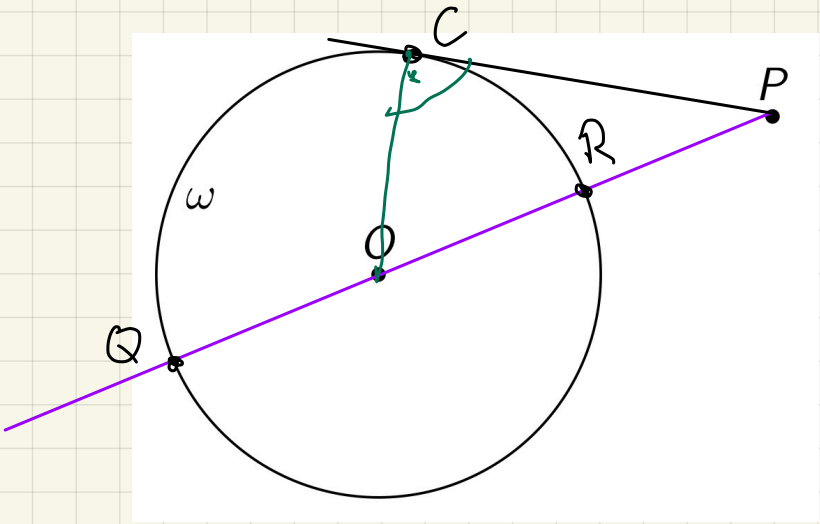
$\triangle PYA$

$\frac{|PY|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PX|}$



Definition: Sei P ein Punkt und ω ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r. Dann ist die Potenz von P bezüglich ω definiert als

$$\text{Pot}_\omega(P) = |OP|^2 - r^2 = (|OP| - r)(|OP| + r) = |RP|\,|QP|$$



Eigenschaften:

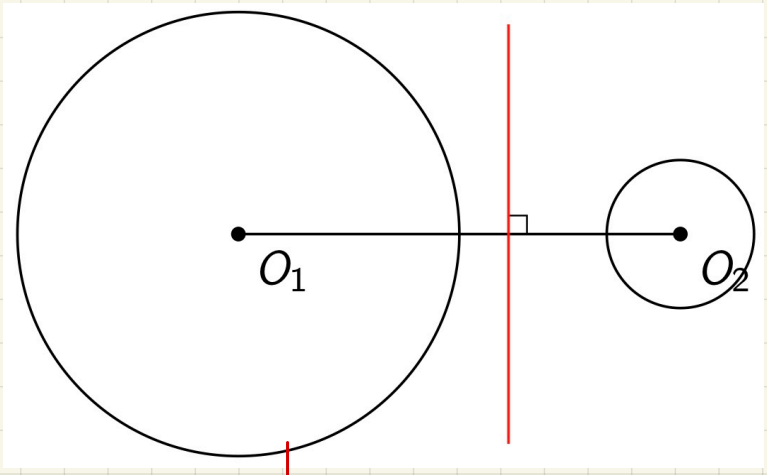
- $\text{Pot}_\omega(P) = 0 \Rightarrow P$ liegt auf dem Kreis
- $\text{Pot}_\omega(P) > 0 \Rightarrow P$ liegt außerhalb des Kreis

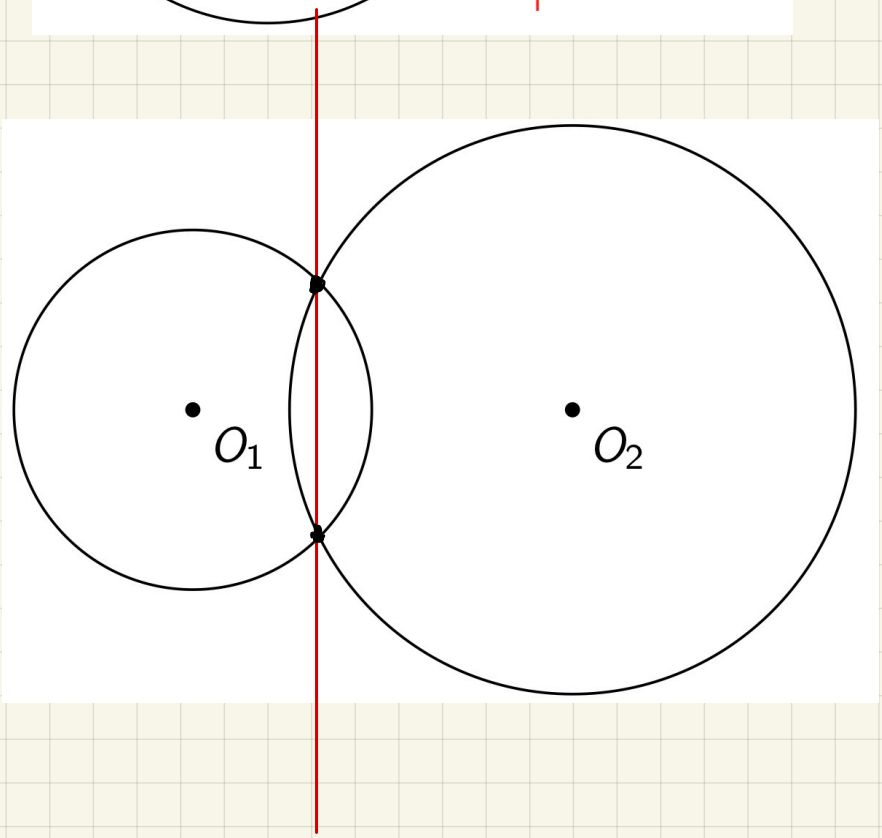
und $\text{Pot}_\omega(P)$ ist genau $|PA| \cdot |PB|$, wobei A und B die Schnittpunkte einer beliebigen Sekante von P durch ω ist.

- $\text{Pot}_\omega(P) < 0 \Rightarrow P$ liegt innerhalb des Kreis

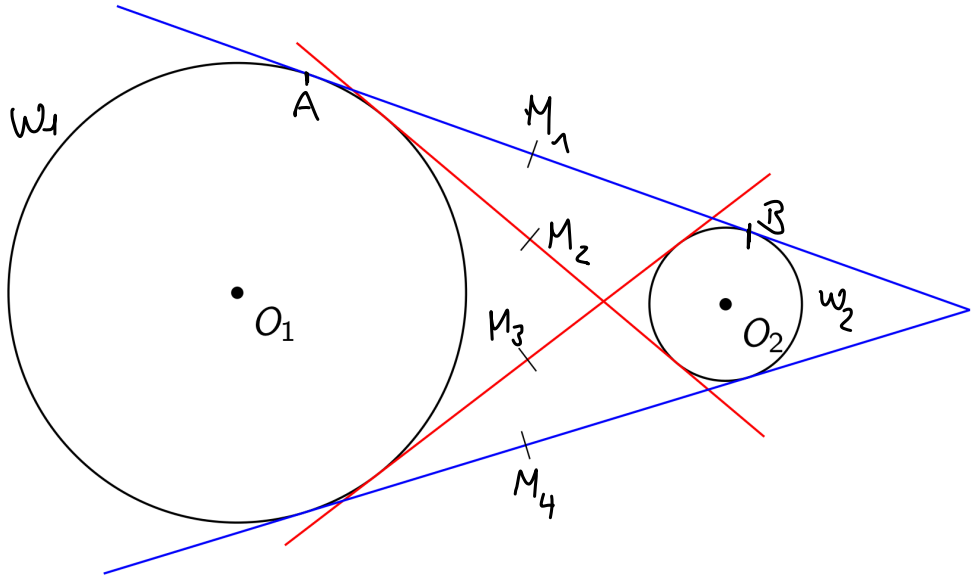
- $\text{Pot}_\omega(P) = |PC|^2$, wobei C der Tangentenberührpunkt von P an ω ist.

Die Menge der Punkte, die bezüglich zweier Kreise w_1 and w_2 mit Mittelpunkten O_1 und O_2 dieselbe Potenz haben, liegen auf einer Geraden, die senkrecht zu O_1O_2 ist. Diese Gerade heißt Potenzgerade.





Zeige: Die 4 Mittelpunkte der 4 gemeinsamen Tangentenabschnitte zweier Kreise liegen auf einer Geraden.



Wir zeigen, dass M_1, M_2, M_3, M_4 alle auf der Potenzgeraden bzgl. w_1 und w_2 liegen.

Es gilt $\text{Pot}_{w_1}(M_1) = |M_1 A|^2$

$= |M_1 B|^2 = \text{Pot}_{w_2}(M_1)$

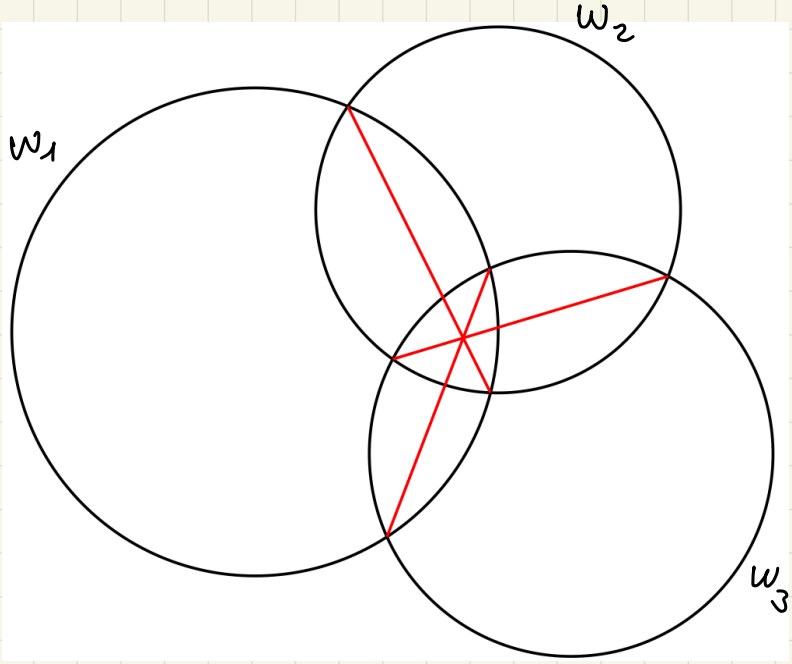
da M_1 Mittelpunkt von $\overline{AB}$

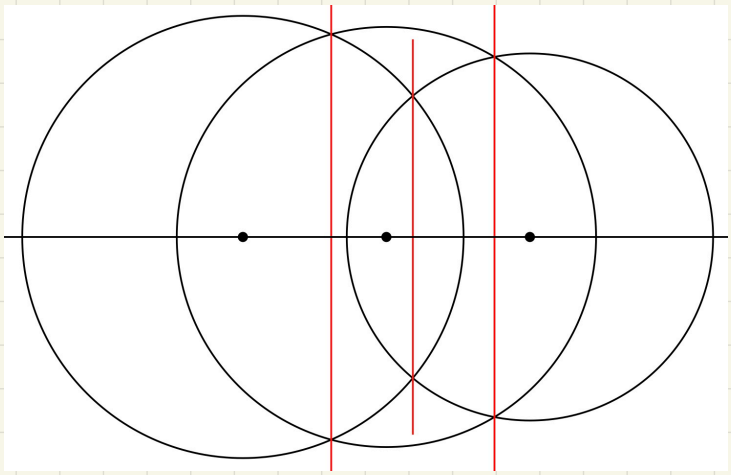
$\Rightarrow$ M_1 liegt auf der Potenzgeraden.

Ähnlich zeigen wir es für M_2, M_3, M_4.

Die Potenzgeraden von drei Kreisen schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel.

das Potenzzentrum





Wenn die Potenzgeraden parallel sind, sind wir fertig.
Wenn die Potenzgeraden nicht alle parallel sind, gibt es zwei, die sich schneiden. Seien dies die Potenzgerade bzgl. w_1 und w_2 und die Potenzgerade bzgl. w_2 und w_3. Sei P deren Schnittpunkt.

zu zeigen: P liegt auch auf der dritten Potenzgerade, also bzgl. w_1 und w_3

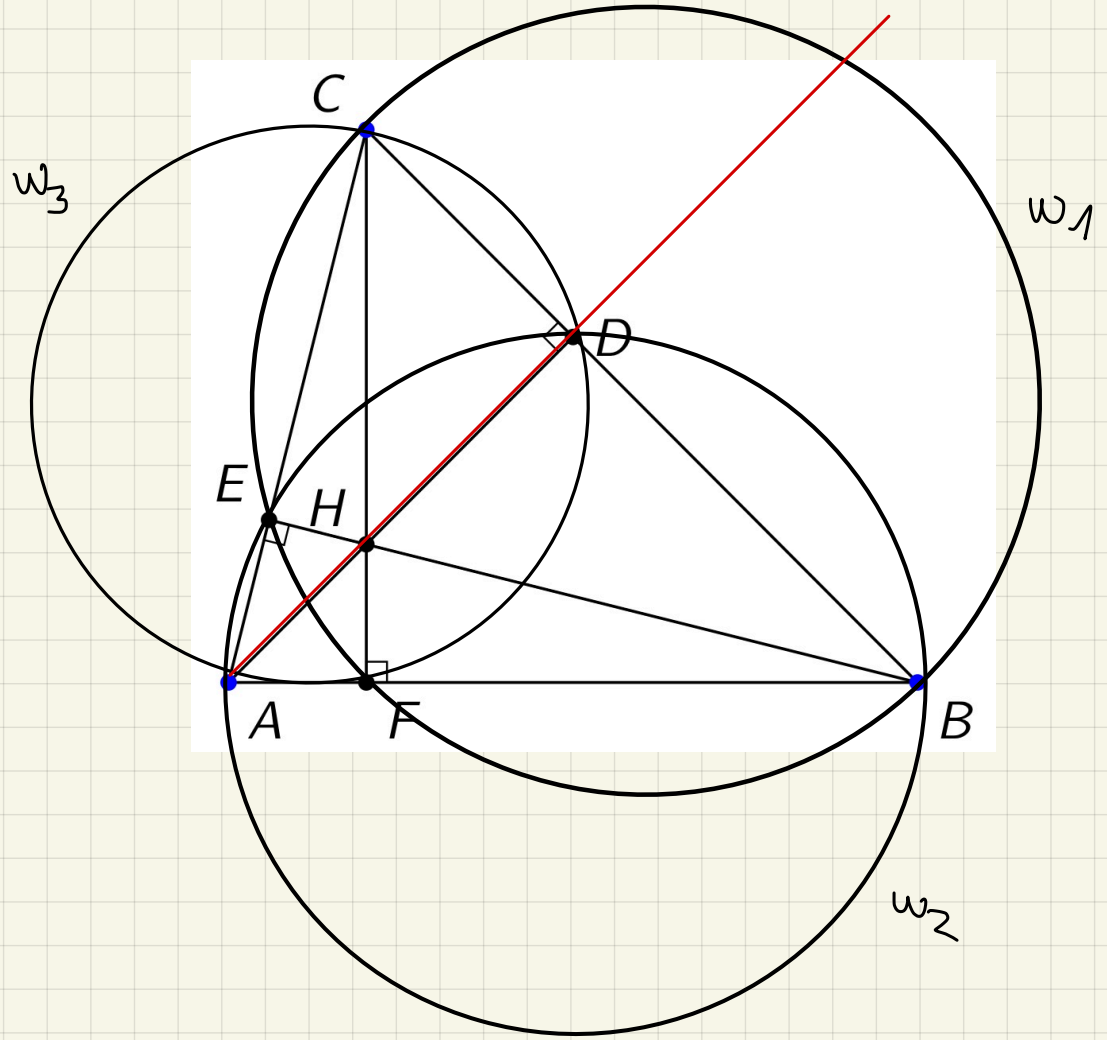
zu zeigen: $Pot_{w_1}(P) = Pot_{w_3}(P)$

Wir wissen bereits: $Pot_{w_1}(P) = Pot_{w_2}(P)$

$Pot_{w_2}(P) = Pot_{w_3}(P)$

Also $Pot_{w_1}(P) = Pot_{w_3}(P)$.

Zeige: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.



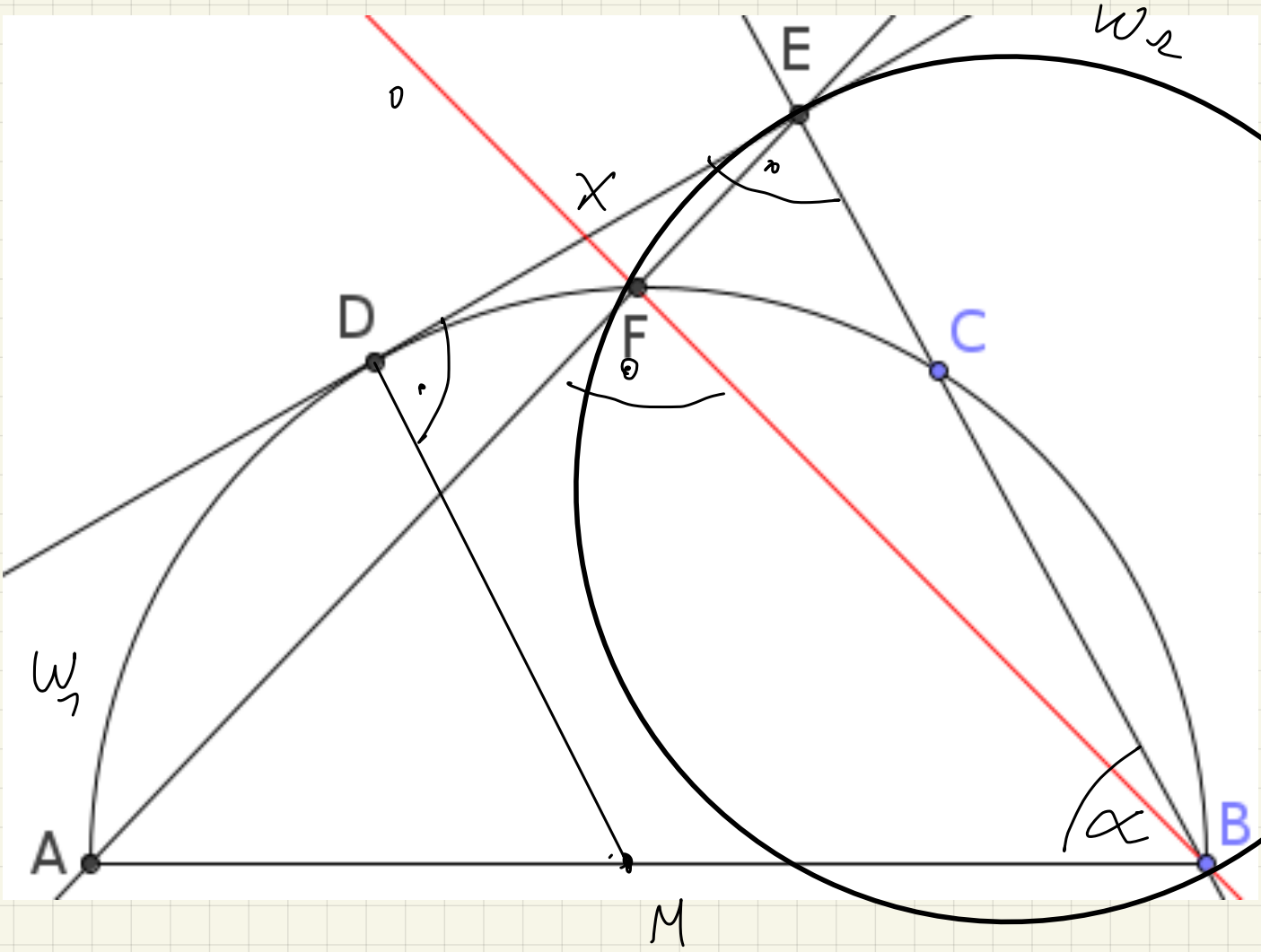
Höhe AD ist die Potengerade von w_2, w_3

BE w_1, w_2

CF w_1, w_3

$\Rightarrow$ Die Höhen schneiden sich in einem Potenzzentrum.

Es sei C ein Punkt auf einem Halbkreis mit Durchmesser AB und sei D der Mittelpunkt des Kreisbogens $\overset{\frown}{AC}$.
Sei E der Lotfußpunkt von D auf BC und F der Schnittpunkt von AE mit dem Halbkreis.
Zeige, dass BF durch den Mittelpunkt von DE geht.



Behauptung: DE ist eine Tangente an den Hilfkreis

$\Rightarrow \sphericalangle CBM = \frac{1}{2} \sphericalangle CMA = \alpha$

$\Rightarrow DM \parallel BC$

$\Rightarrow \sphericalangle MDE = 90°$

Wir werden zeigen, dass BF eine Potenzgerade bzgl. zweier Kreise ist.

ω_2 sei der Umkreis von BEF

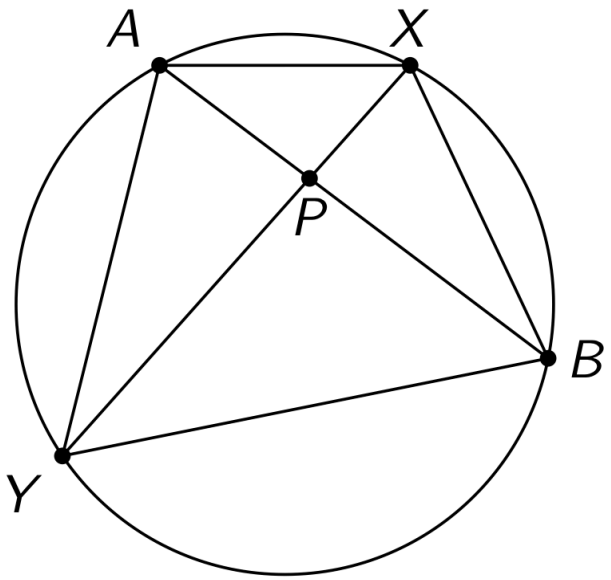
$\Rightarrow$ BF Potenzgerade bzgl. ω_1 und ω_2.

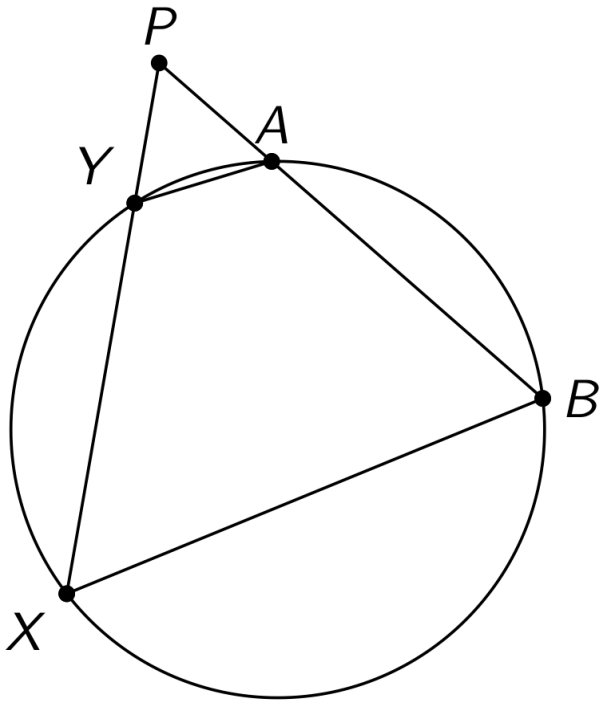
Außerdem ist XE eine Tangente an ω_2

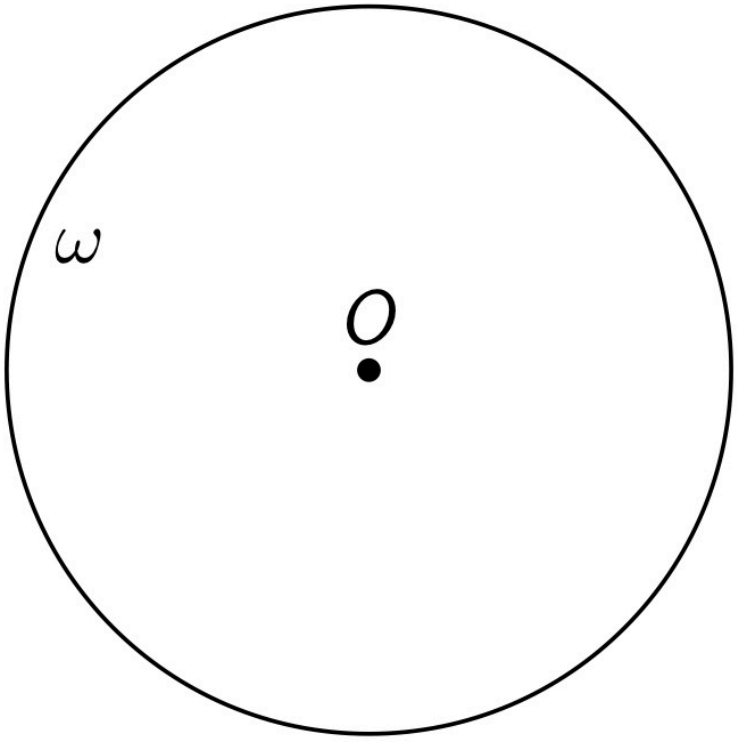
$\Rightarrow \operatorname{Pot}_{\omega_1}(X) = \operatorname{Pot}_{\omega_2}(X)$

$\Leftrightarrow |XD|^2 = |XE|^2$

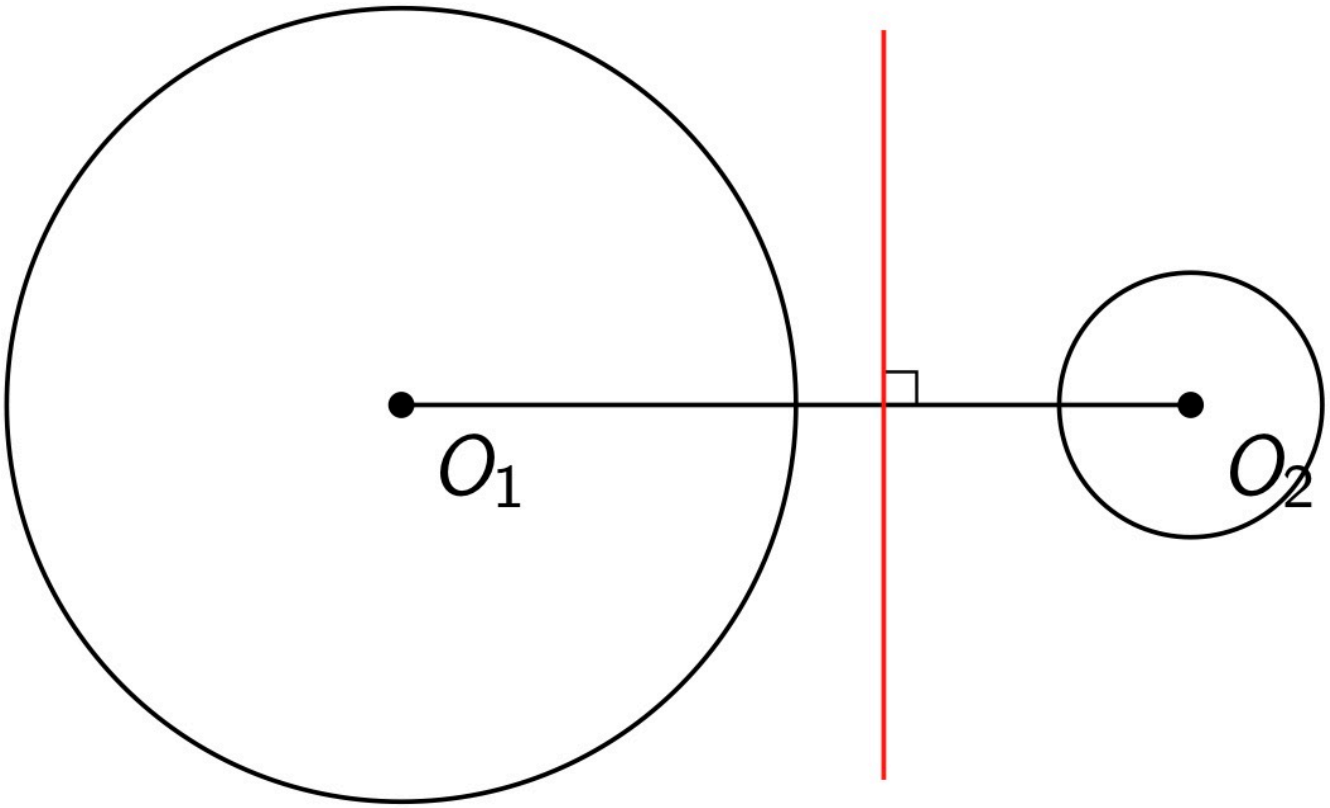
$\Rightarrow |XD| = |XE|$.

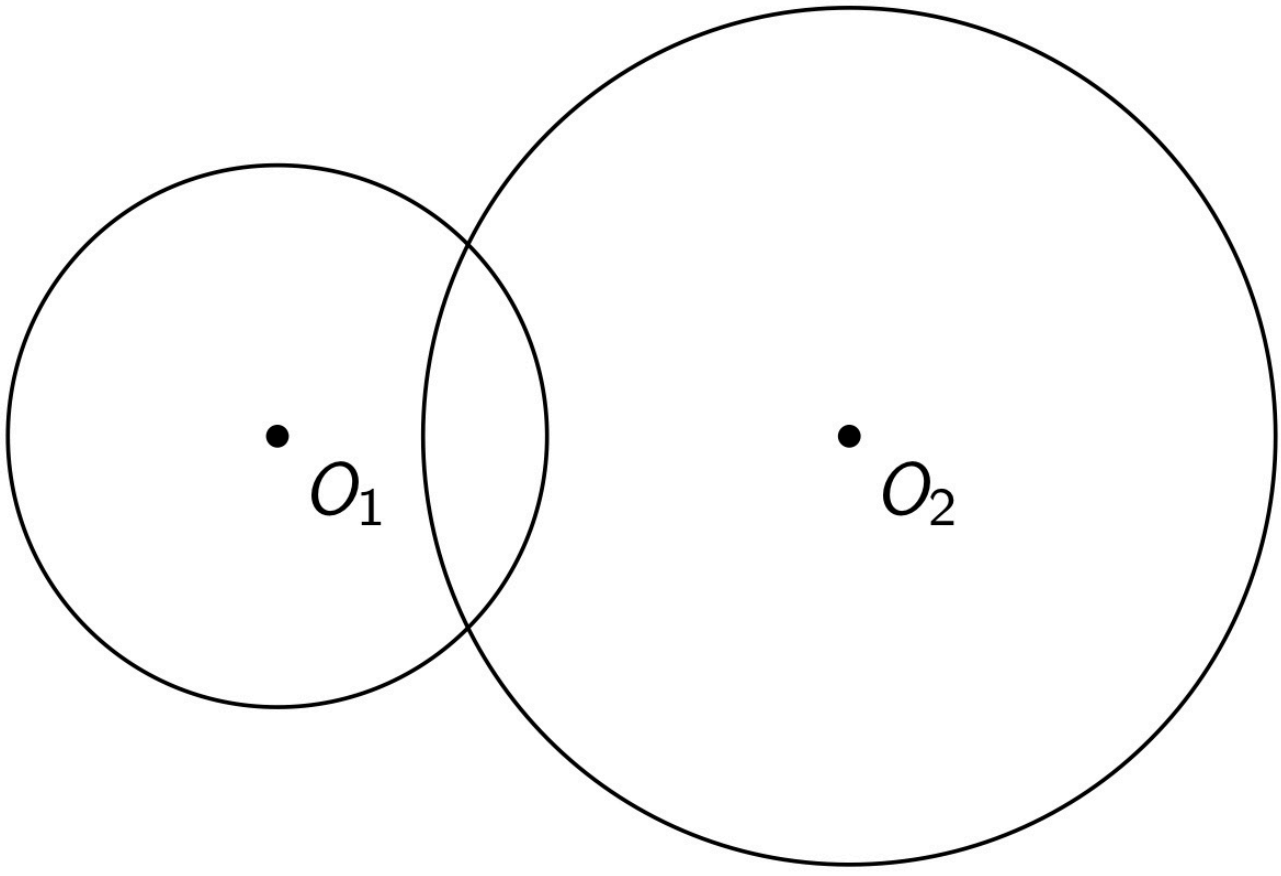

A
X
P
B
Y

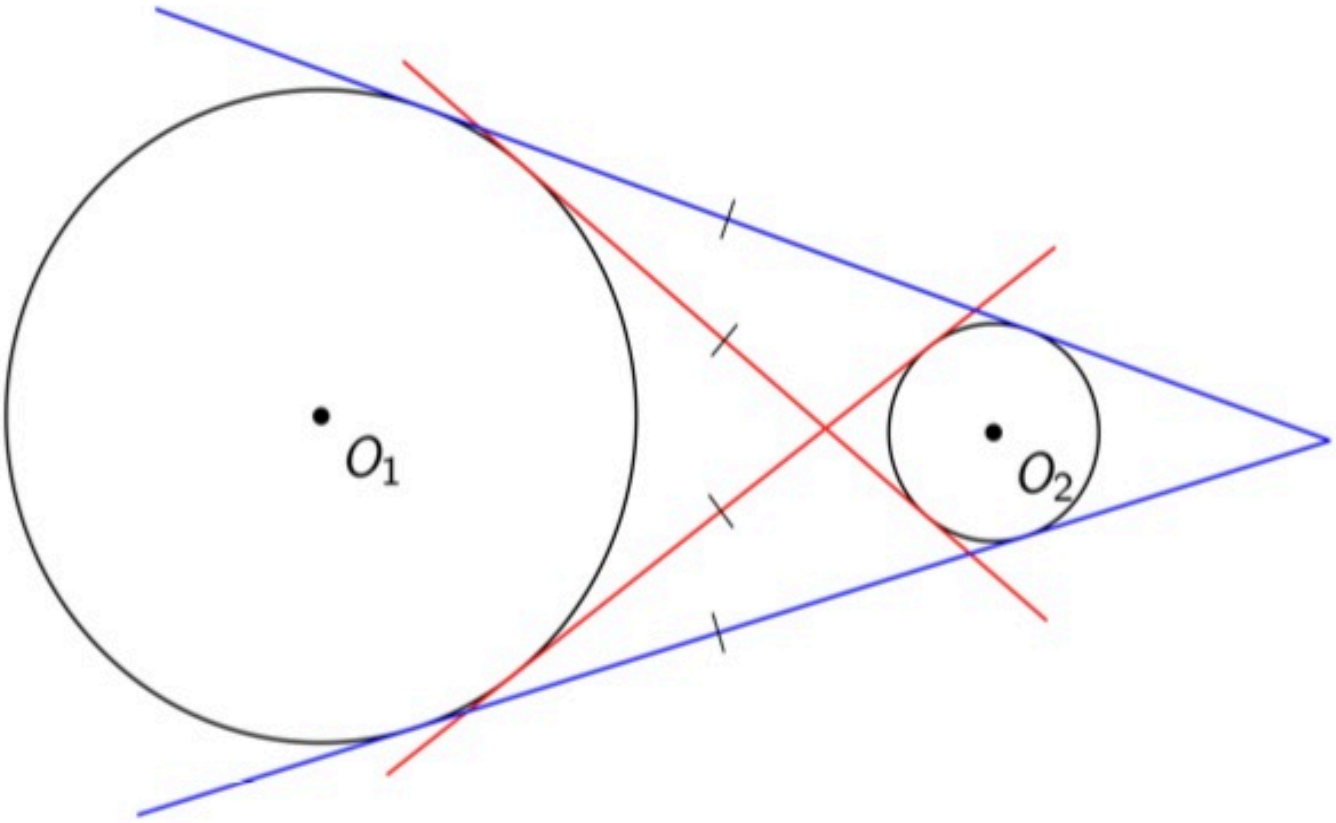

P
A
Y
B
X

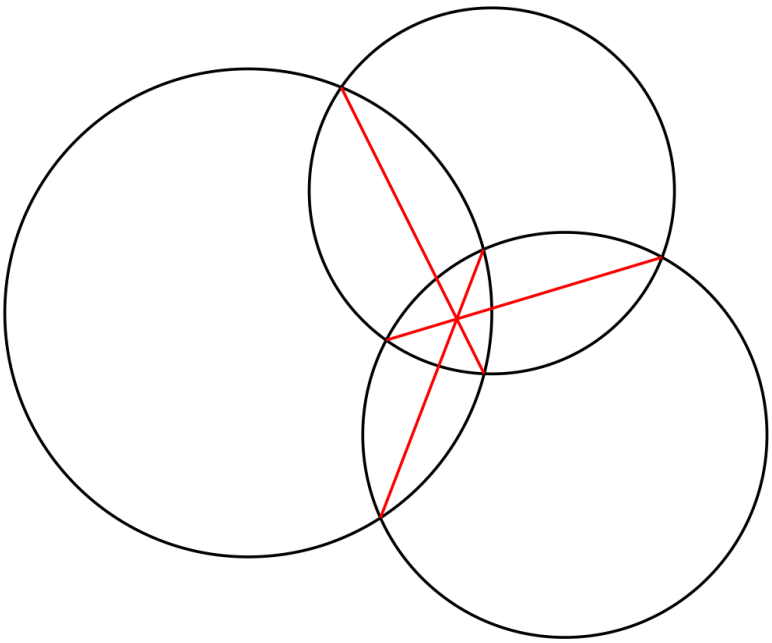

ω
O

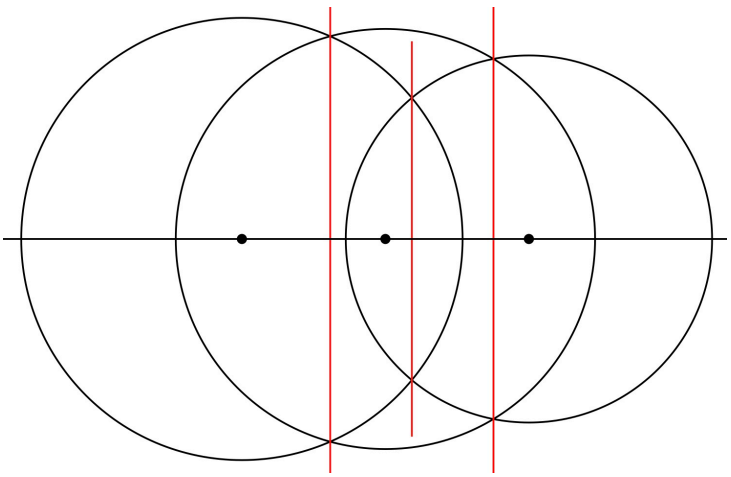

P

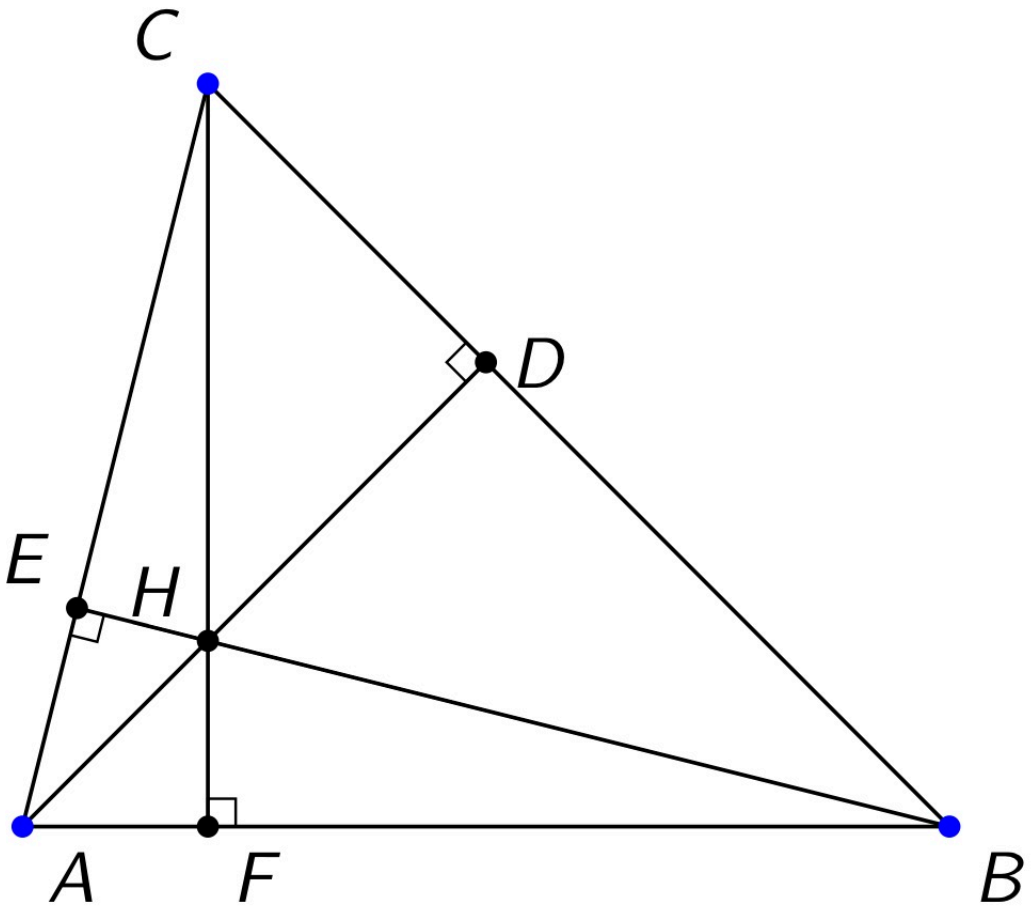

O_1
O_2

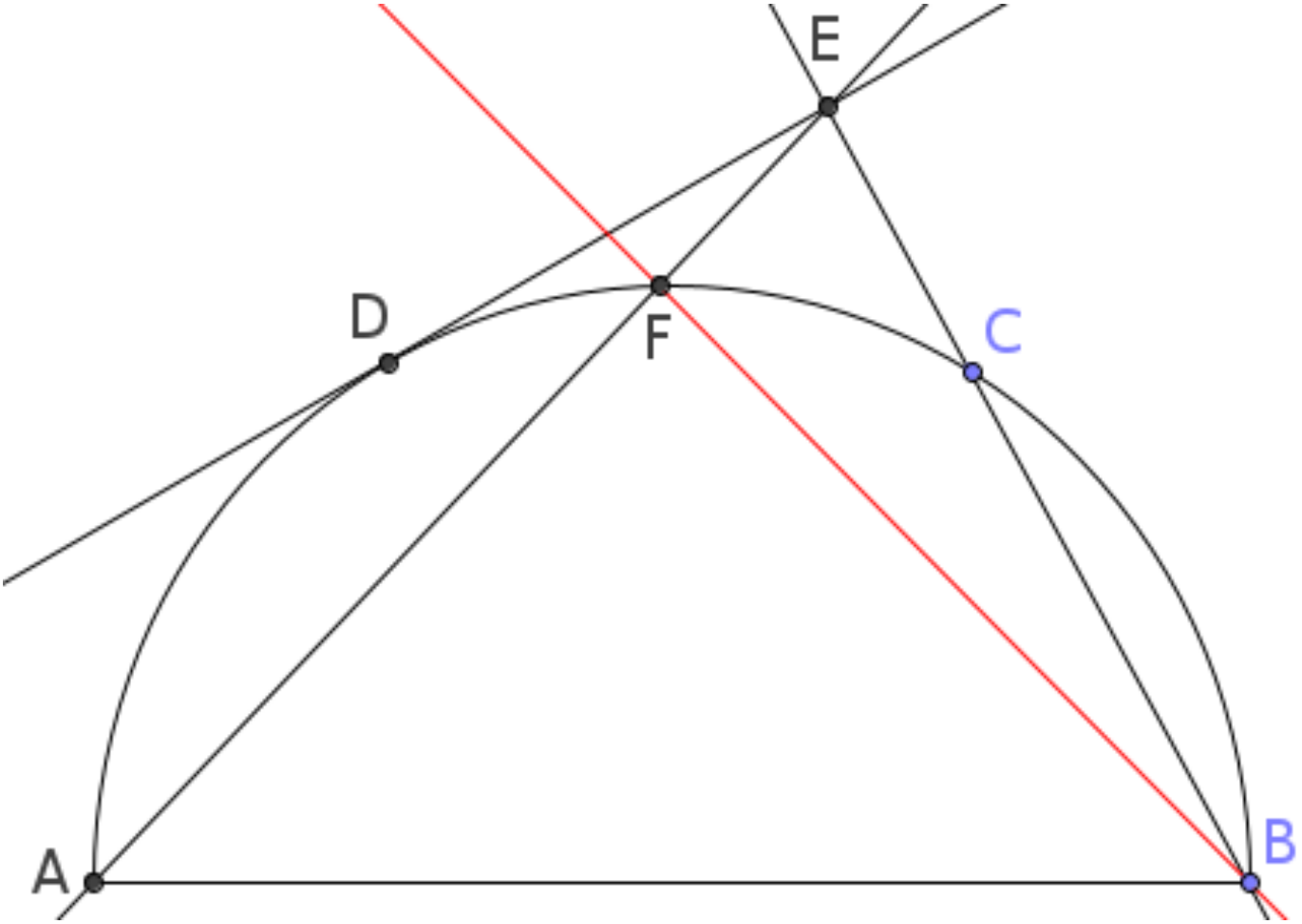

O_1
O_2

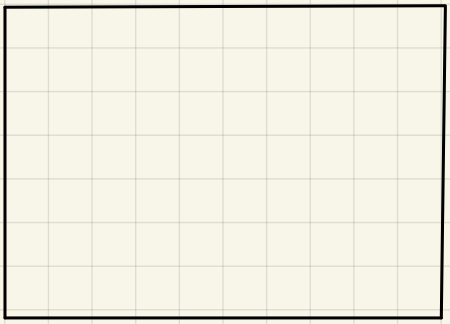

O_1
O_2






C
D
E
H
A
F
B


E
D
F
C
A
B



$$\frac{b-a}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b\cdot(b-a)}{b-a}$$

a b c

$:b$

a $b-a$ $1-\frac{a}{b}-b+a$ $+\frac{a}{b}-a$ a

1 2 1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1 2

b $1-\frac{a}{b}$ $1-b$ $\frac{a}{b}$

8 ✓

4

2 ✓ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

~~4~~

$\frac{3}{4}\cdot\frac{1013}{8}$ ~~2026~~

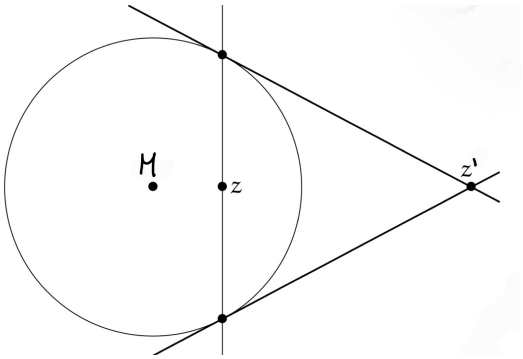
$\frac{3039}{4}$

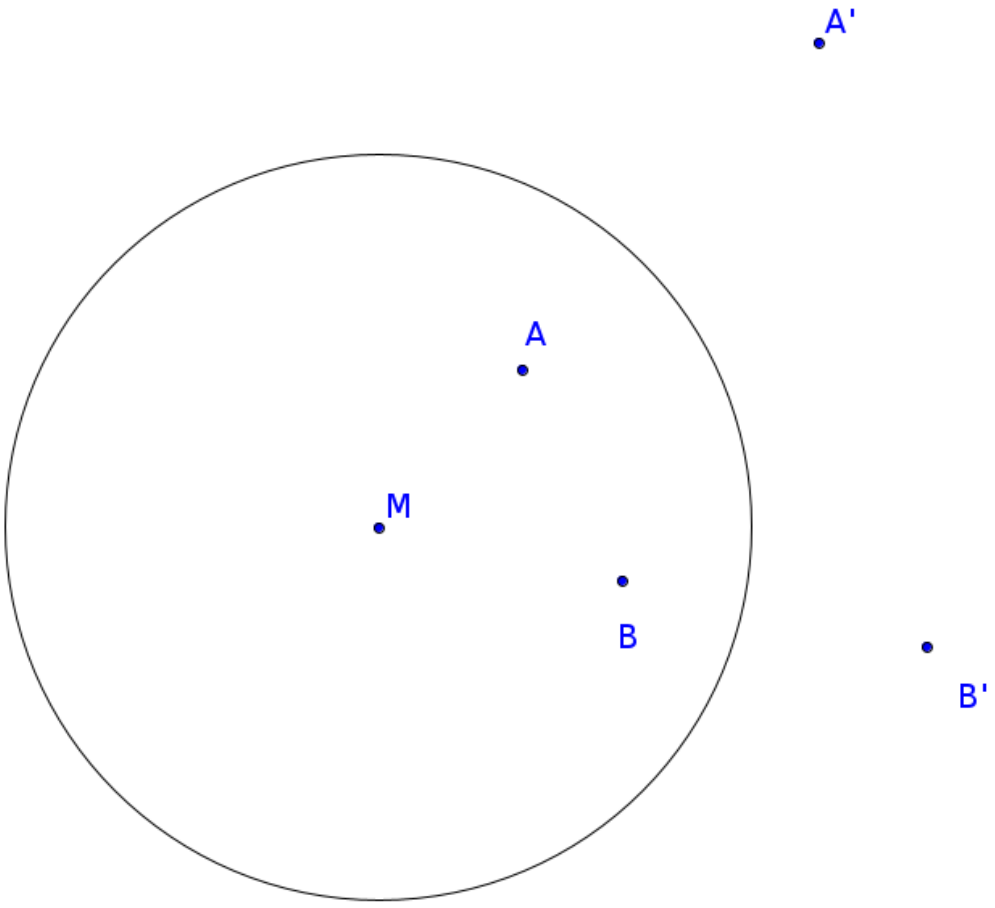
$b = 1-b$

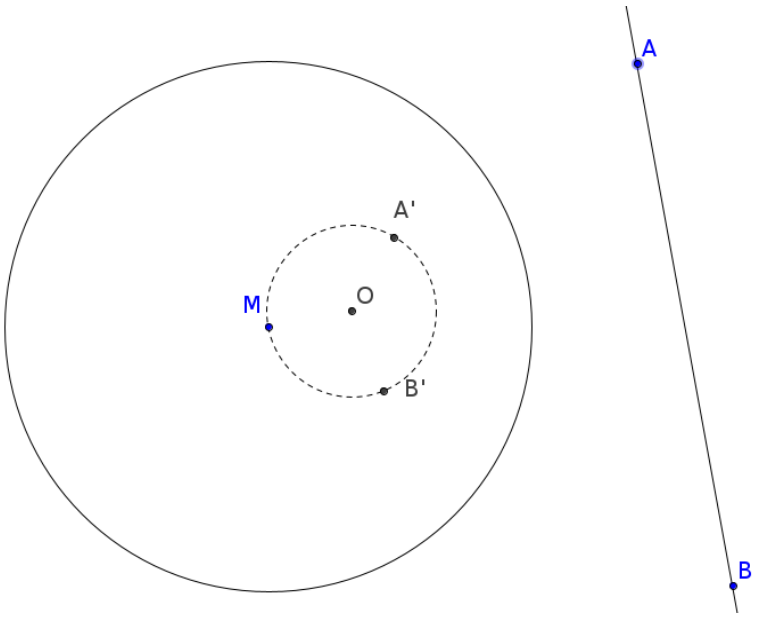
$b = \frac{1}{2}$

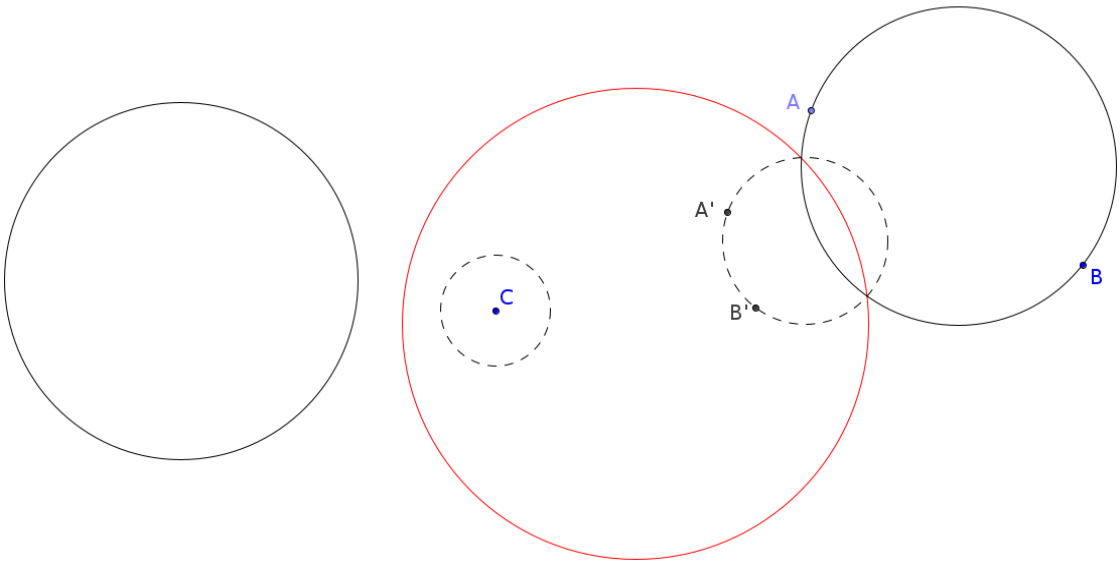
$\frac{a}{b} = b$

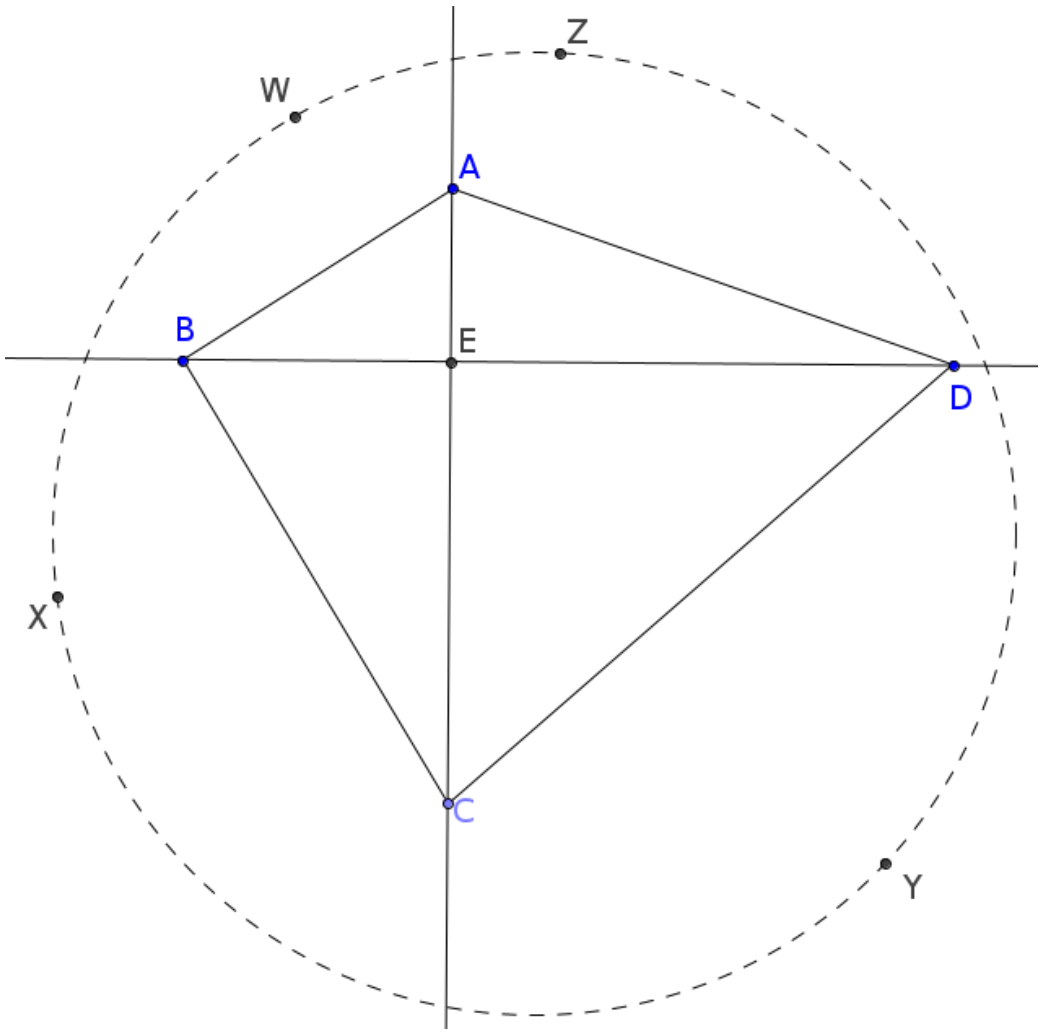
$a = b^2 = \frac{1}{4}$


M
z
z'


A'
A
M
B
B'


A
A'
M
O
B'
B

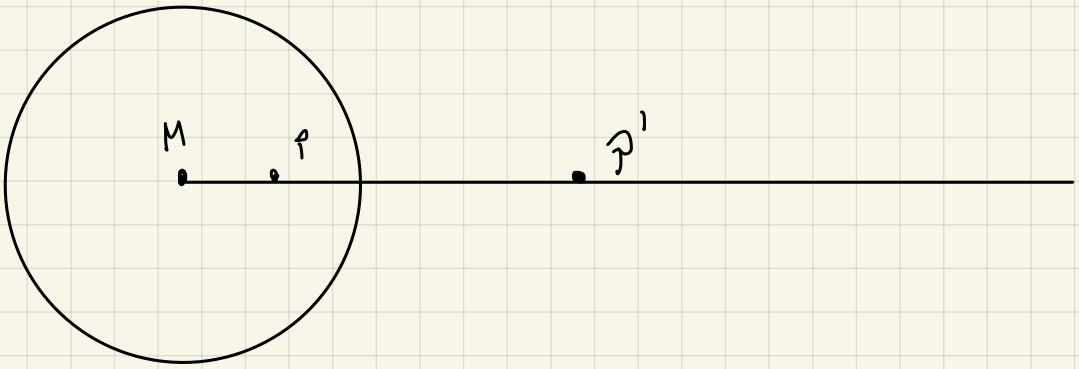

A
A'
B
C
B'


Z
W
A
B
E
D
X
C
Y

Inversion am Kreis

Definition: Es sei K ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M.
Eine Inversion oder Spiegelung eines Punktes P an dem Kreis K bildet P ab auf den Punkt P' auf dem Strahl $\overrightarrow{MP}$, für den gilt:

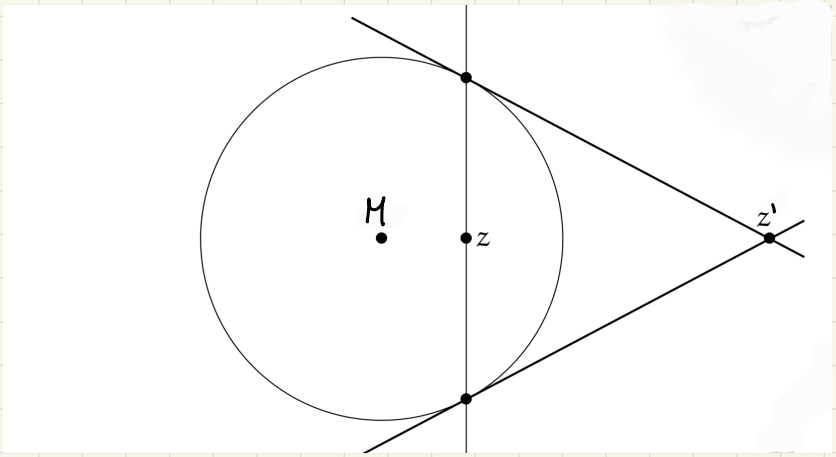
$$|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2$$



Es gilt
- $P = P'$ genau dann, wenn P auf K liegt
- Wenn man P' wieder an K spiegelt, erhält man wieder den Punkt P

Lemma: Sei z ein vom Mittelpunkt verschiedener Punkt im Inneren des Kreises K. Dann liegen die Tangentenberührpunkte der Tangenten von z' an K auf einer Geraden mit z.

Seien A B die Berührpunkte der beiden Tangenten und P der Schnittpunkt von Mz' mit AB.



Zu zeigen: $P = z$.

Die Dreiecke MBP und $Mz'B$ sind ähnlich, weil sie beide rechtwinklig sind und einen gemeinsamen Winkel bei M haben.

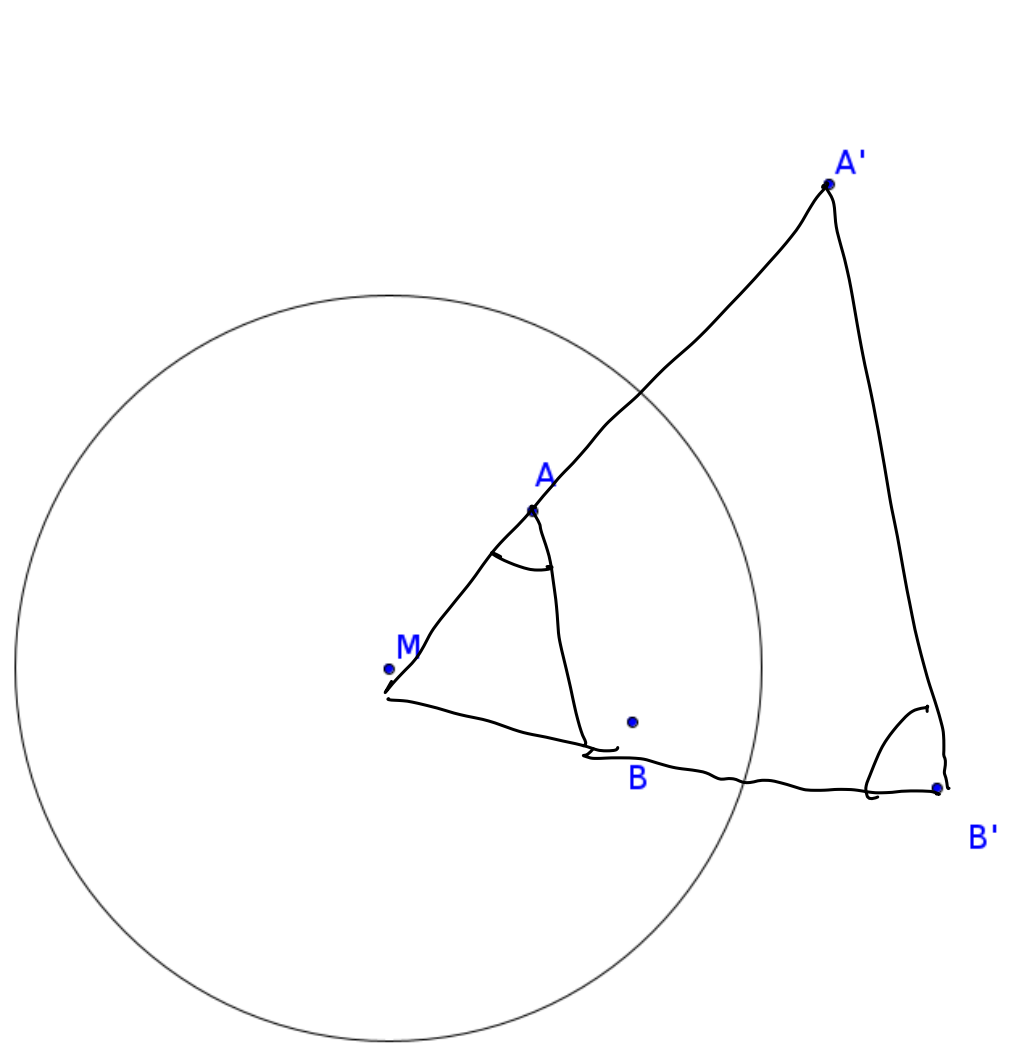
$$\Rightarrow \frac{|\overline{MP}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{Mz'}|}$$

$$\Rightarrow |MP| \cdot |Mz'| = |MB|^2 = r^2$$

$\Rightarrow$ P ist Bildpunkt von z' bei Inversion an K

$\Rightarrow P = z$

Es seien A' und B' die Inversen der Punkte A und B bei einer Inversion eines Kreises mit Mittelpunkt M. Dann ist ABB'A' ein Sehnenviereck.



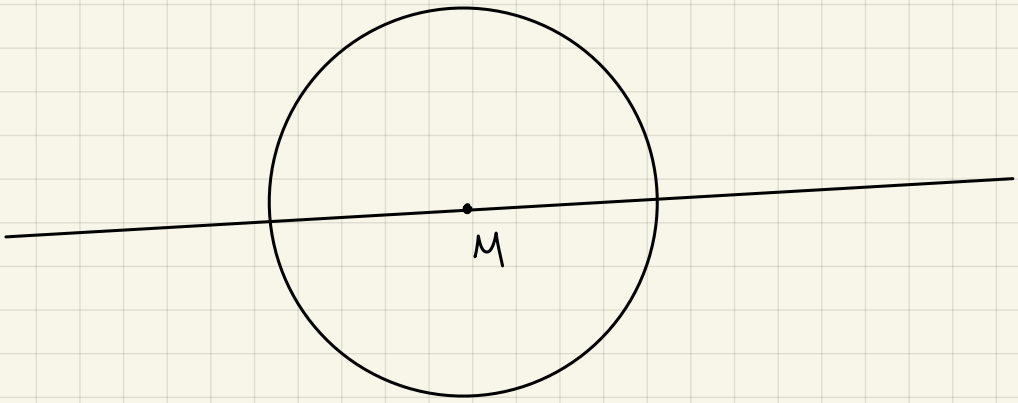
wegen $|\overline{MA}| \cdot |\overline{MA'}| = r^2 = |\overline{MB}| \cdot |\overline{MB'}|$

Nach der Umkehrung des Sekantensatzes liegen A, B, B', A' auf einem Kreis

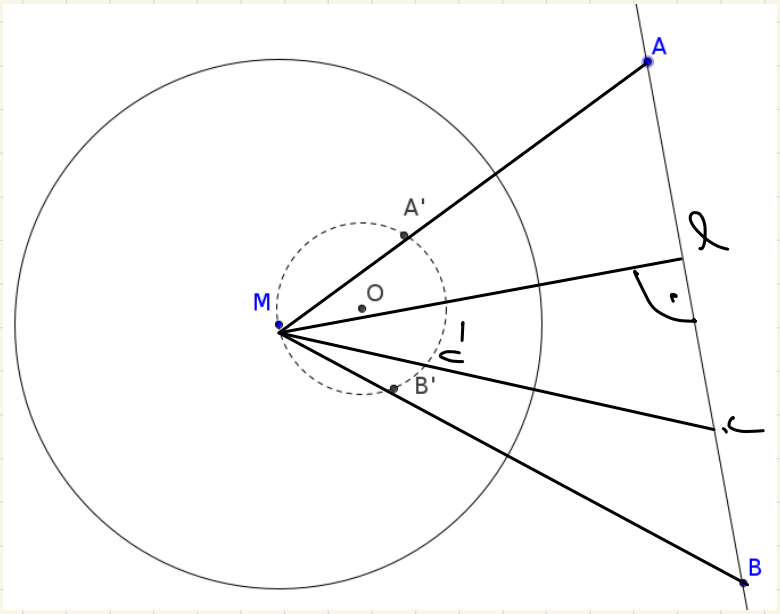
Kreise und Geraden unter Kreisinversion

Es sei K mit Mittelpunkt M. Wir führen eine Kreisinversion and K durch.

- Eine Gerade durch M wird abgebildet auf sich selbst.

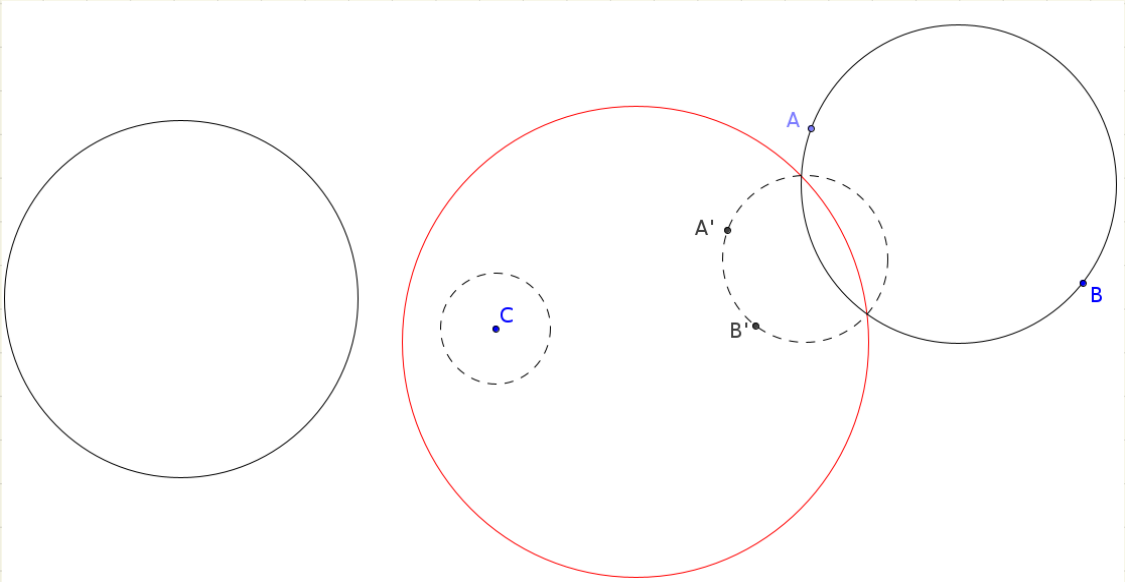


- Eine Gerade l, die nicht durch M läuft, wird abgebildet auf einen Kreis, der M enthält und für dessen Mittelpunkt O gilt, dass MO senkrecht auf l steht.



- Ein Kreis durch M wird abgebildet auf eine Gerade, die nicht durch M geht.

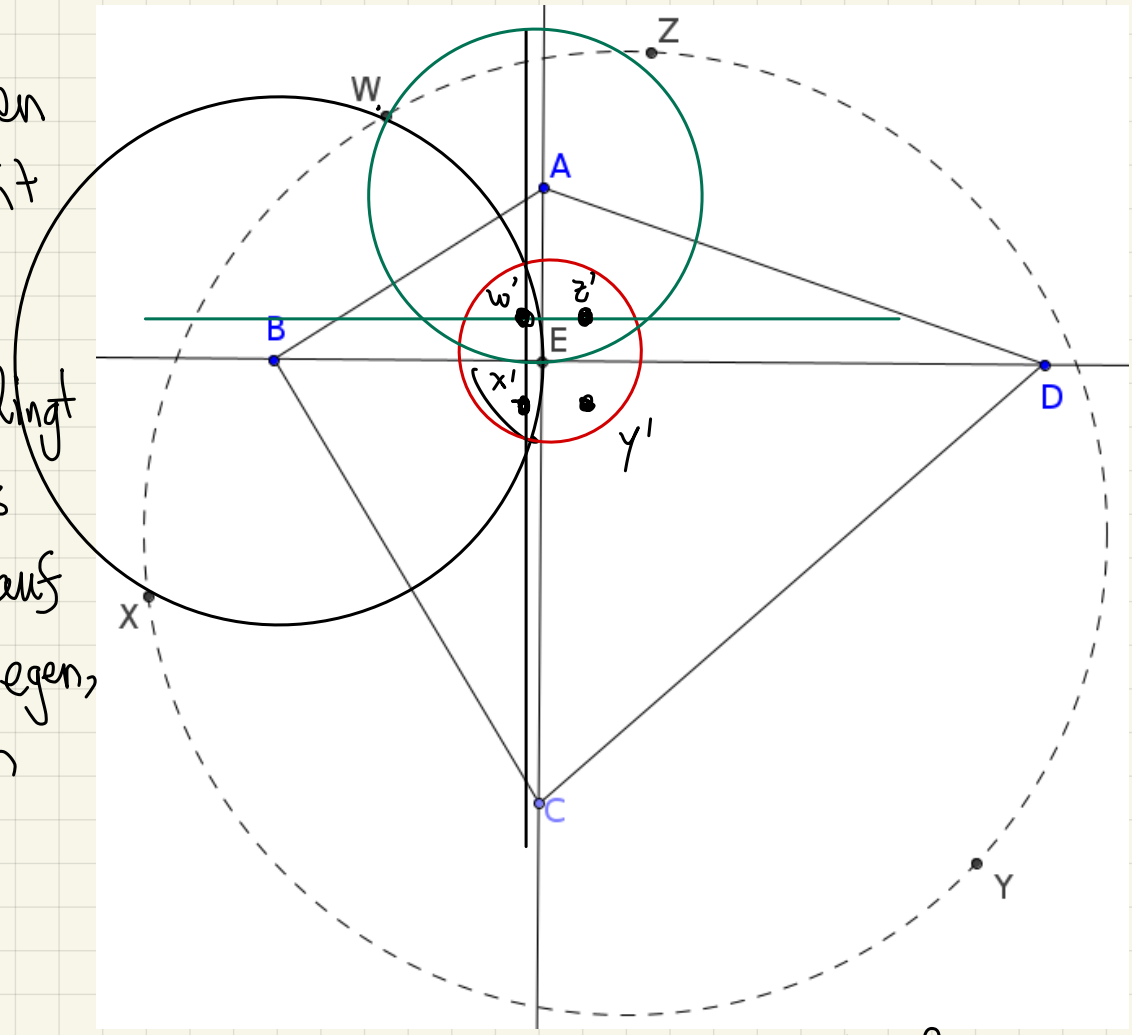
- Ein Kreis, der nicht durch M geht, wird abgebildet auf einen anderen Kreis, der nicht durch M geht



Sei $\square ABCD$ ein Viereck, sodass sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht im Punkt E schneiden. Zeige, dass die Spiegelpunkte von E an den vier Seiten des Vierecks auf einem Kreis liegen.

Hinweis: Spiegele die Abbildung an irgendeinem Kreis um E

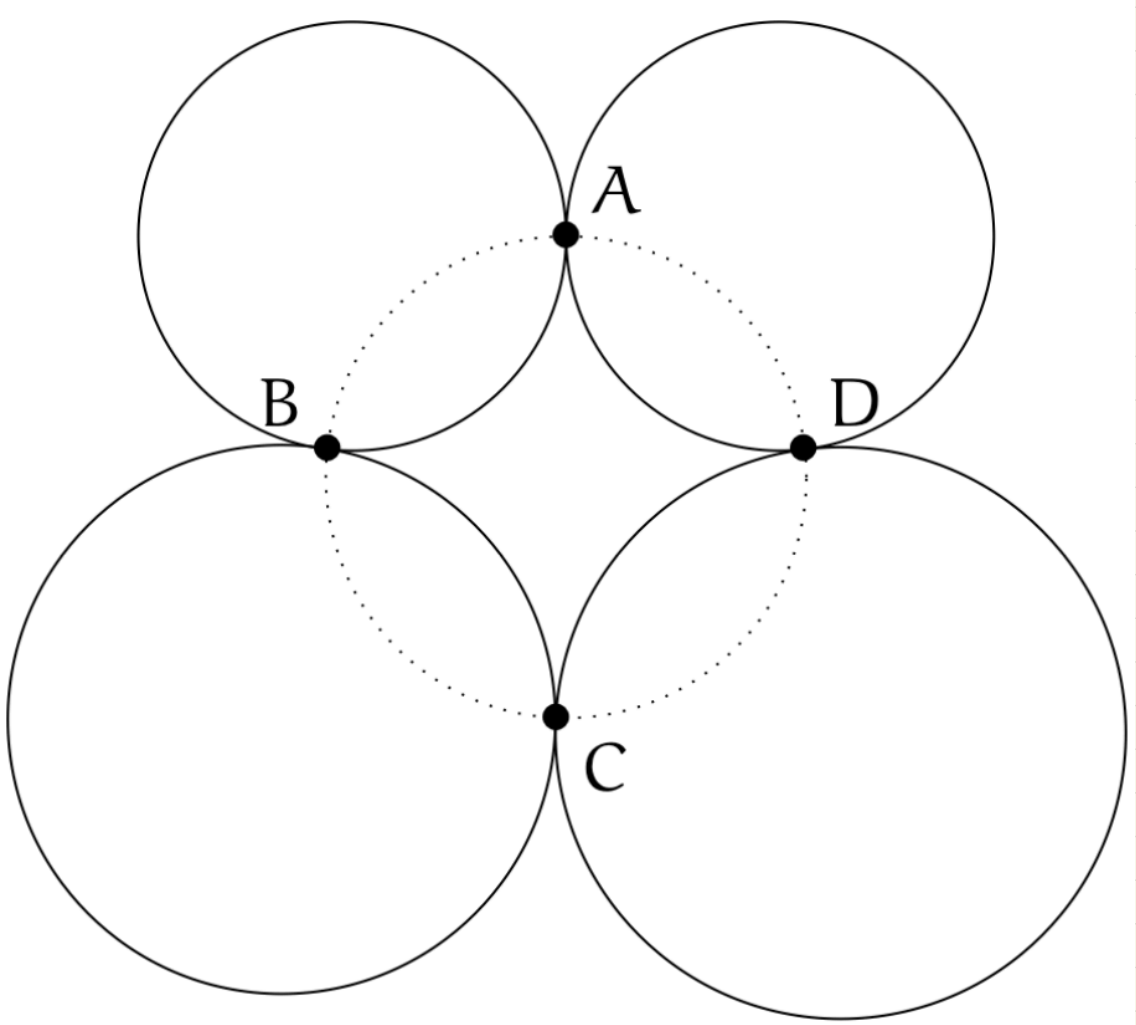
Spiegele die Abbildung an den Kreis um E mit Radius 1.



Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass W', X', Y', Z' auf einem Kreis liegen, dann liegen auch W, X, Y, Z auf einem Kreis.

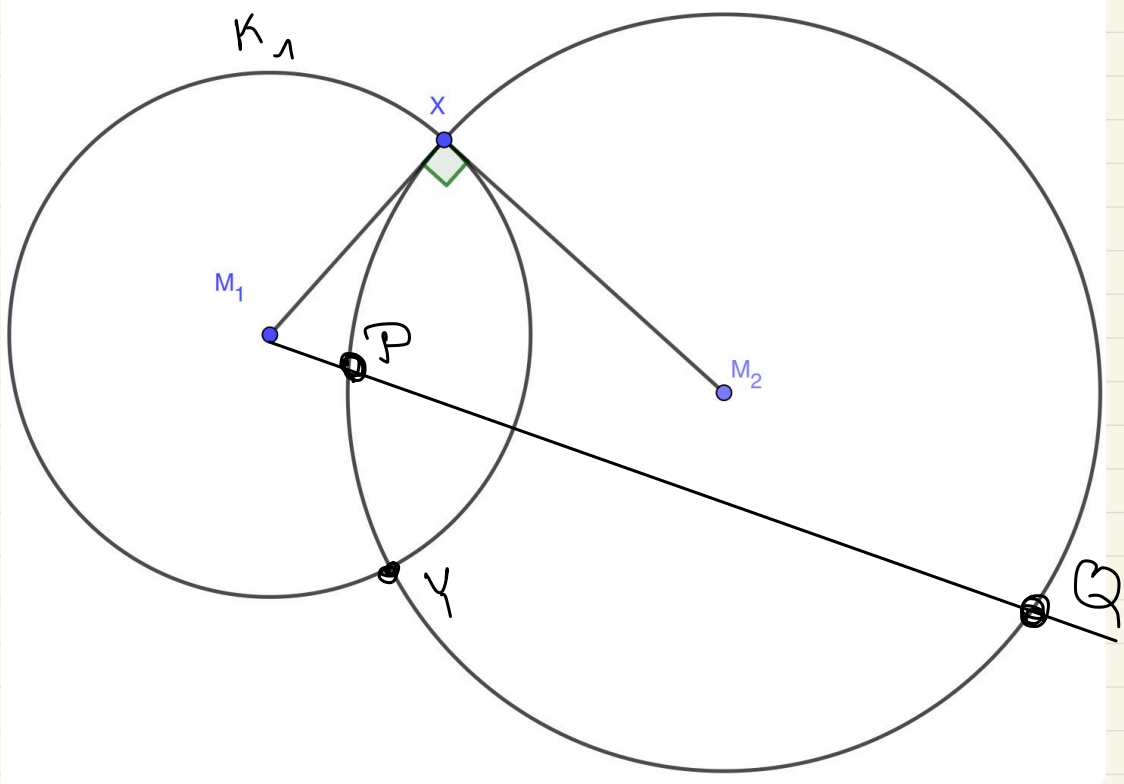
Sei K_1 der Umkreis von W, E, X. Dieser hat Mittelpunkt B
Wenn K_1 gespiegelt wird, erhalten wir eine Gerade, die senkrecht zu BE ist. Analog können wir den Umkreis um EWZ spiegeln und erhalten eine grüne Gerade, die senkrecht zu AC ist. W' ist der Schnittpunkt der Geraden.
$\Rightarrow$ $W'X'Z'Y'$ ist ein Rechteck
$\Rightarrow$ Die Punkte liegen auf einem Kreis.

Seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier Kreise, die sich reihum in den Punkten A, B, C, D berühren. Zeige, dass A, B, C, D auf einem Kreis liegen.



Definition: Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Schnittpunkten X und Y schneiden sich orthogonal, wenn $\sphericalangle M_1 X M_2 = 90°$.

Lemma: Schneiden sich zwei Kreise K_1 und K_2 orthogonal, dann wird K_2 bei Inversion an K_1 auf sich selbst abgebildet.



Zu zeigen: $|M_1P| \cdot |M_1Q| = r_1^2$

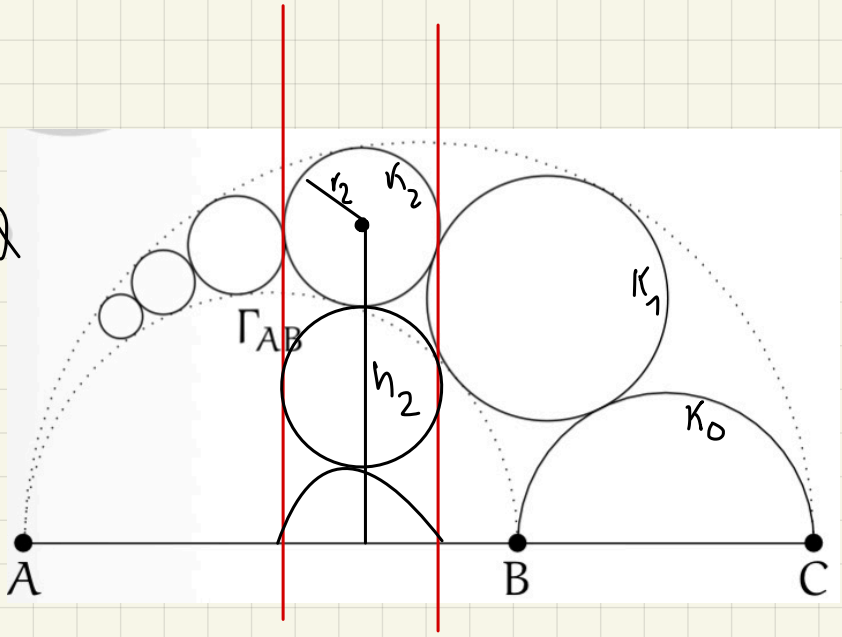
$\doteq |M_1X|^2$

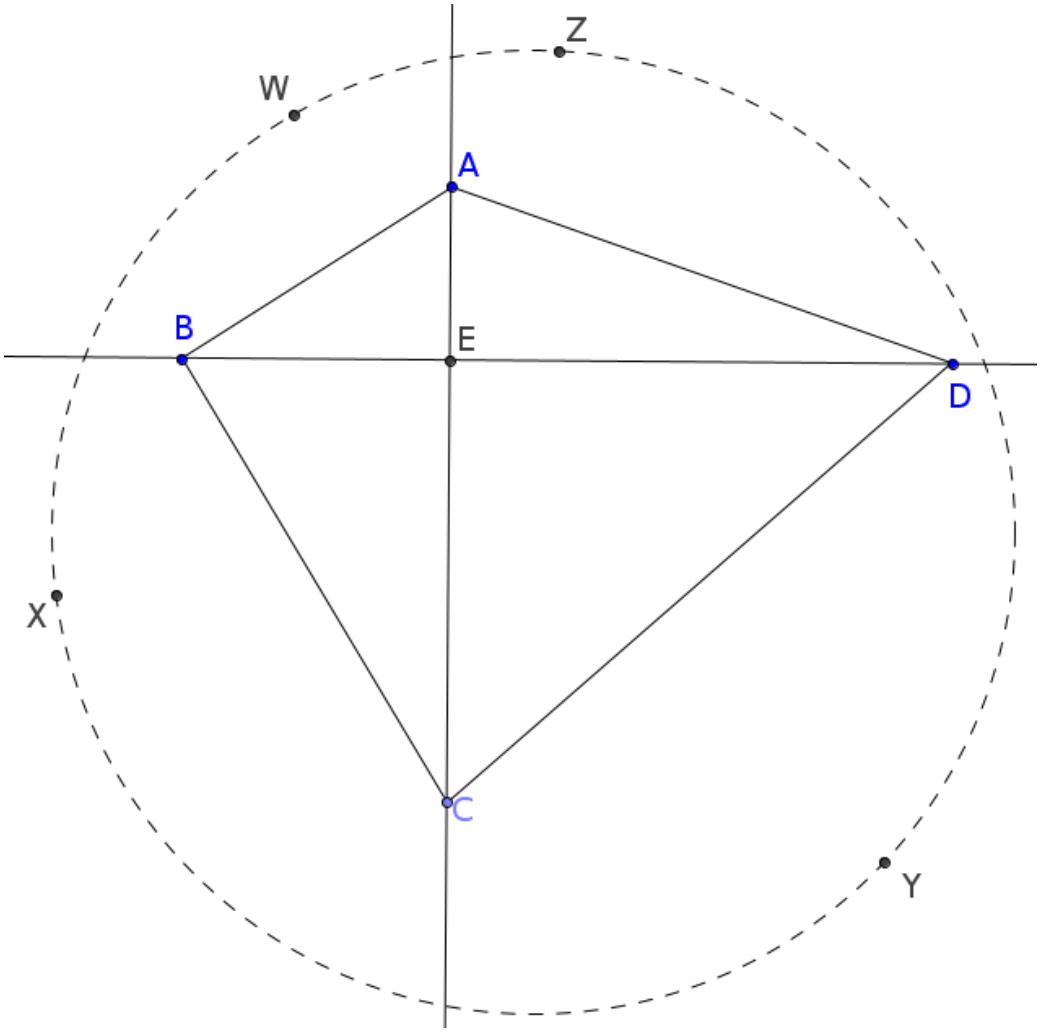
Das gilt nach Tangenten-Sekantensatz.

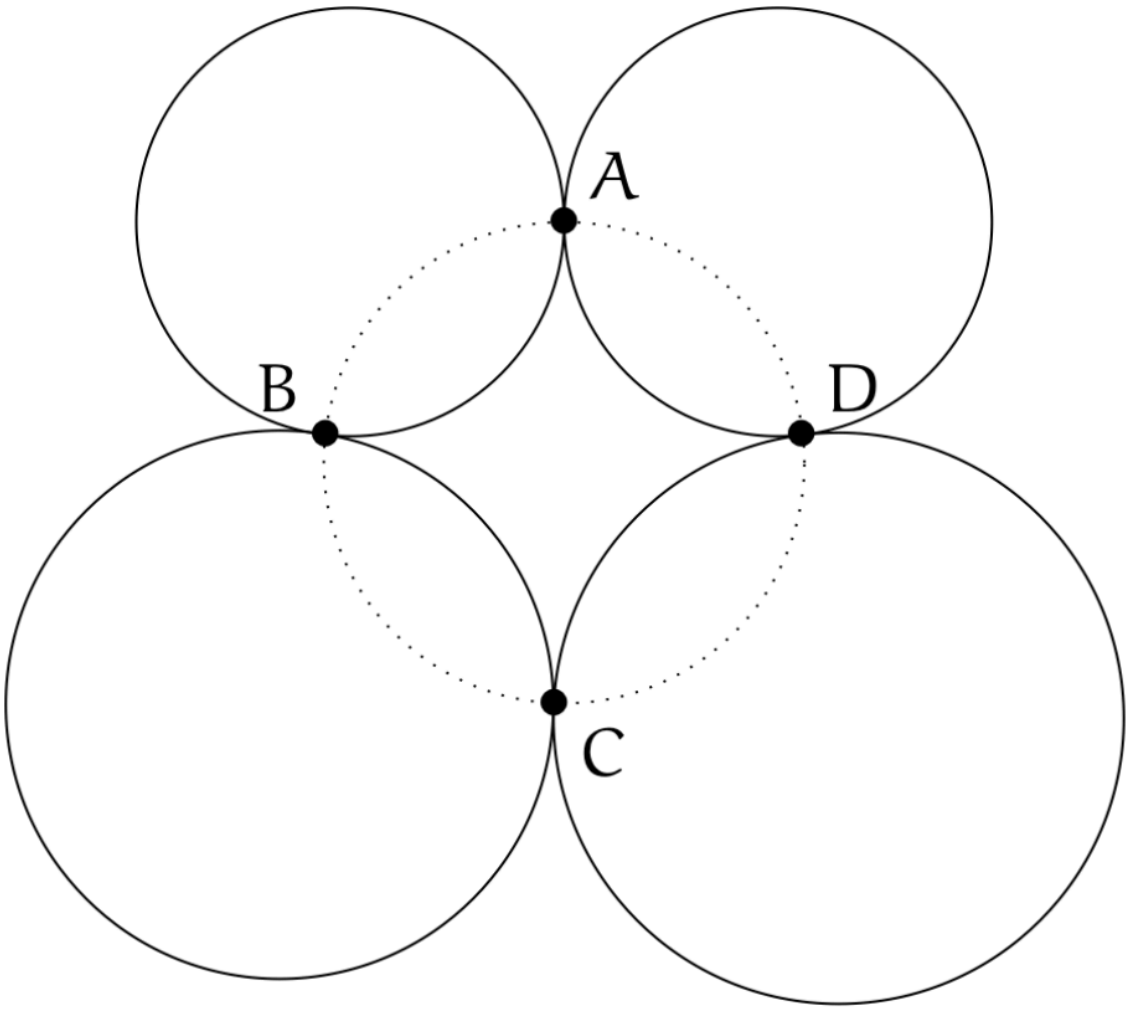
Seien A, B, C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Weiter seien Γ_{AC}, Γ_{AB}, K_0 drei Halbkreise auf der gleichen Seite von AC mit Durchmesser $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun K_n der Kreis, der Γ_{AC}, Γ_{AB} und K_{n-1} berührt. Sei weiter h_n der Abstand des Mittelpunkts des Kreises K_n zur Geraden AC. Beweise, dass

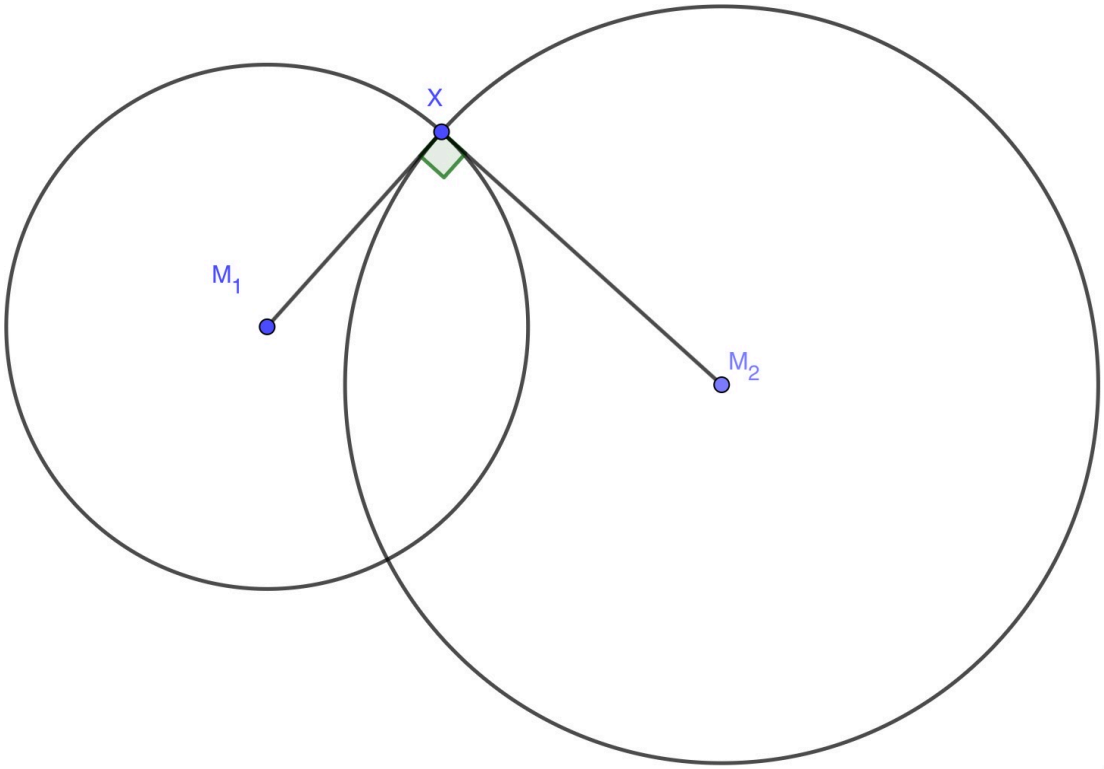
$$h_n = 2n\, r_n.$$

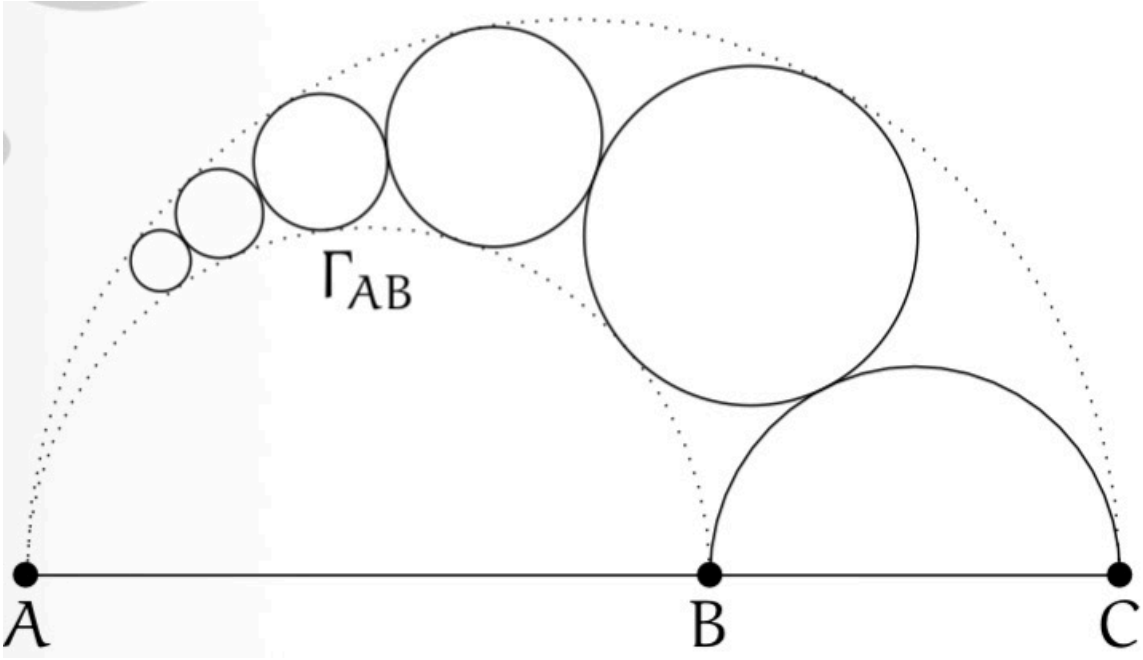
Spiegle an den Kreis um A, der K_n orthogonal schneidet.




Z
W
A
B
E
D
X
C
Y


A
B
D
C


X
M1
M2


ΓAB
A
B
C

- konkrete Aufgaben
- Folgen und Funktionen
- Spieletheorie

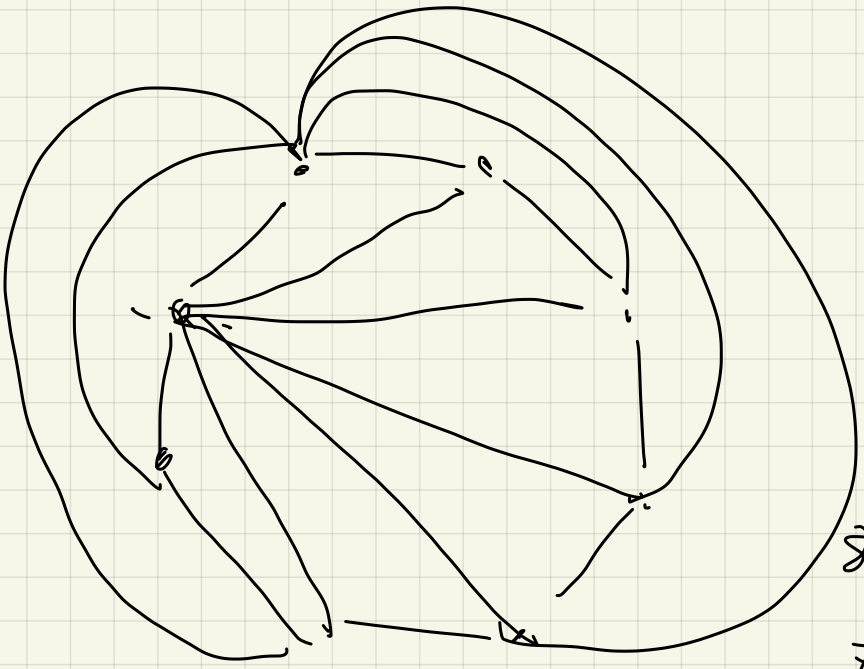
$$x_n = \frac{n}{6}$$

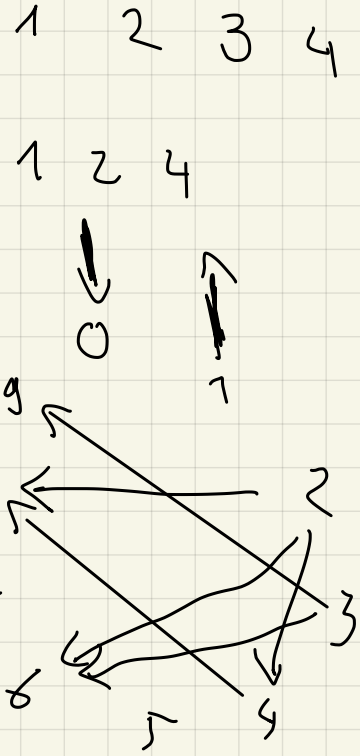
$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right)$$

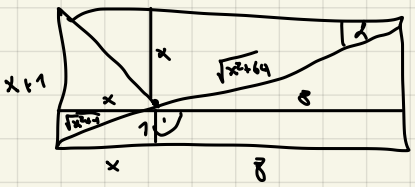
$$= \frac{n+1}{n+3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n+3}\left(\frac{n+3}{6}\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}$$







$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 67$ $\qquad \frac{25 \cdot 67}{175}$ $\quad 150$

$2f(1) + 3f(2010) = 5$

$2f(6) + 3f(5 \cdot 67) = 30$

$2f(5 \cdot 67) + 3f(6) = 5 \cdot 5 \cdot 67$

$f(6) - f(1) = 1645$

$5f(6) - 4935 = 30$

$5f(6) = 4965$

$f(6) = 993$ $\qquad 5 = 1+1+1+1+1$

11 Striche $\rightsquigarrow$ 11 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

9 Striche $\rightsquigarrow \binom{9}{5} = 84$

7 Striche $\rightsquigarrow \binom{7}{5} = 7 \cdot 3 = 21$

6 = 15
24 x
33
42 x
51

4 = 31
22 x
13

3 21 x
12 x

2 11 x

5 = 14
23 x
32 x
41

8
15

50 · 99 4950

5050

2	4	6	8	10
20	18	16	14	12

1 mod 4 (x-9)(x+9)

6 mod 25 1 1 0 1 -1 0 -1 -1 0 -1 1 0 1 1 0

ab = 27 · 13 - a - b

ab + a + b + 1 = 352 13 · 27 + 1

(a+1)(b+1) = 352

= 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 11
16 22

(-1, 1) (2, 4)
1

641242

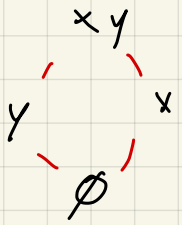
Die 12 Kinder einer Gruppe organisieren 12 Projekte, an denen nur Kinder dieser Gruppe teilnehmen. Darauf sind alle stolz, besonders darauf, dass keine zwei Projekte die gleiche Menge von teilnehmenden Kindern haben.

Nun soll ein Kind der Gruppe ausgewählt werden, das alle Aktivitäten in der Gruppenchronik dokumentiert und dazu auch an den Projekten teilnimmt, an denen es zunächst nicht beteiligt war.

Man zeige, dass es immer möglich ist, eines der 12 Kinder so zu finden, dass es weiterhin keine zwei Projekte mit der gleichen Teilnehmendenmenge gibt, wenn dieses Kind dann an allen 12 Projekten teilnimmt.

$V(G)$ = Projekte als TN-Mengen

$E(G) = \{xy \mid x = y \cup \{t\}\}$



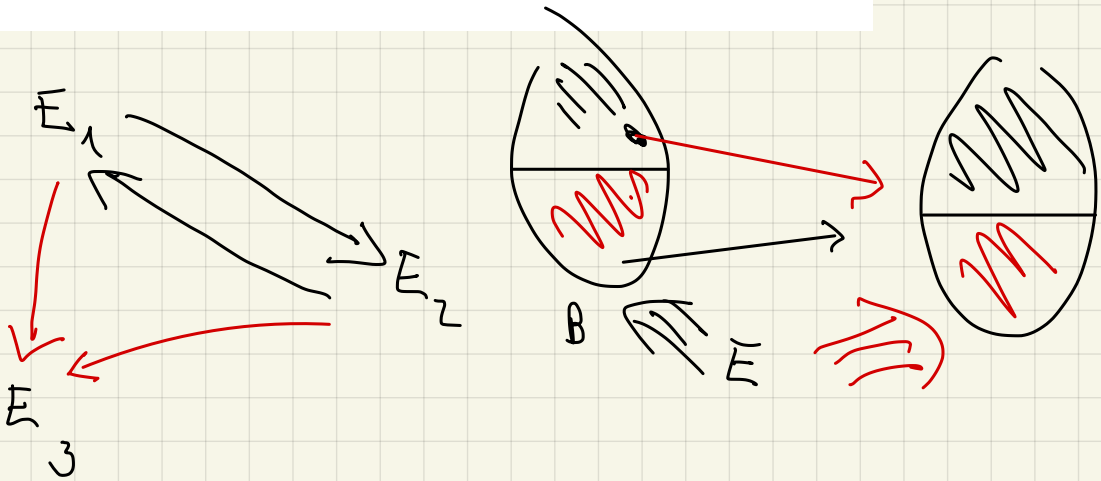
↳ G kreisfrei

⇒ $e(G) \leq 11$

631243

Bei einem Fest beschenken sich 25 Elfen untereinander. Keine Elfe beschenkt sich selbst. Jede Elfe beschenkt mindestens eine andere Elfe, aber keine Elfe beschenkt alle anderen.

Man beweise, dass man dann eine Gruppe von drei Elfen auswählen kann, in der es mindestens zwei Elfen gibt, die jeweils von den beiden anderen Elfen eine beschenken und eine nicht beschenken.



511342

Im Landkreis „Kreisland“ gibt es $n \geq 3$ Dörfer, von denen einige durch Straßen miteinander verbunden sind. Jede Straße verbindet genau zwei Dörfer. Dazwischen gibt es keine Kreuzungen oder Abzweigungen, Tunnel und Brücken sind jedoch möglich. Zwischen je zwei Dörfern gibt es höchstens eine Straße.

Es ist bekannt, dass man von jedem Dorf aus jedes andere auf diesen Straßen erreichen kann. Außerdem wurde festgestellt, dass dies nicht mehr möglich ist, wenn für ein Fahrradrennen irgendein Rundkurs von Straßen zwischen den Dörfern gesperrt wird.

Man bestimme die maximal mögliche Anzahl von Straßen im Kreisland.

The answer is $2n-3$. On one hand the graph $K_{2,n-2}+uv$ where u and v are the vertices which form one part of the bipartition fulfill all conditions: All vertices except for u and v have degree 2. Each cycle contains at least one vertex which is not u or v. If the cycle is deleted, this vertex is isolated and the graph is no longer connected.

Now suppose G is a connected graph with $2n-2$ edges. We will find a cycle C such that $G-C$ is still connected. Let $v \in V(G)$ and let T be the BFS tree of G rooted at v. In $G-T$, the vertex v is isolated, but we still have $2n-2-(n-1)=n-1$ edges. But a graph with an isolated vertex, n vertices in total and $n-1$ edges must have a cycle C. But then $G-C \subseteq T$ which is connected. Hence, we are done. Back to Problem

Exercise 209. **3/5**

Prove that a connected graph G with at least three vertices has two vertices x and y such that

- $G-x-y$ is connected and
- x and y are adjacent or have a common neighbour.

Hint given in white:

A lot of students find this solution online. Maybe one has to reformulate the question?

Exercise 210. **2/5**

Show that a graph G is bipartite if and only if every subgraph H of G has an independent set of size at least $\frac{1}{2}|V(H)|$.

Exercise 19. **3/5**

Let $G=(V,E)$ be a graph with n vertices. For vertex subsets $A, B \subseteq V$, an *A-B-edge* is an edge of G with one endpoint in A and the other in B.

Show that at least one of the following statements must be true for G:

(i) There exist disjoint subsets $A, B \subseteq V(G)$ such that $|A|, |B| \geq \lfloor n/3 \rfloor$ and there is no A-B-edge in G.

(ii) G has a path of length at least $\lfloor n/3 \rfloor$.

591242

In alter Zeit gab es einen keltischen Stamm, der aus mehreren Familien bestand. Viele dieser Familien waren untereinander so zerstritten, dass sich ihre Oberhäupter weigerten, einander die Hand zu geben. Einmal stellten sie bei der jährlichen Zusammenkunft der Familienoberhäupter sogar fest, dass es unmöglich war, vier oder mehr von ihnen so im Kreis aufzustellen, dass jeder bereit gewesen wäre, seinen beiden Nachbarn die Hand zu geben.

Um ihnen den Ernst ihrer Lage vor Augen zu führen, sammelte ihr Druide von jeder Familie drei Goldstücke ein. Der Druide ließ dann diejenigen Oberhäupter einander die Hand geben, die dazu bereit waren. Für jeden Handschlag zweier Familienoberhäupter zahlte er jedem der beiden Oberhäupter ein Goldstück als Belohnung aus.

Man beweise, dass die Anzahl der vom Druiden eingesammelten Goldstücke um mindestens drei größer war als die Anzahl der als Belohnung ausgezahlten Goldstücke.

$\gamma(G)=3 \Rightarrow 2e(G) \leq 3v(G)-3$

$e(G) \leq \frac{3v(G)-3}{2}$

Sei G kleinstes Gegenbeispiel, also sodass $e(G)$ minimal

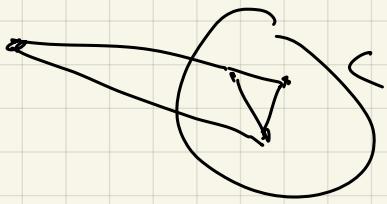
Fall 1 G ist kreisfrei: Dann $e(G) \leq v(G)-1$

$v(G) \geq 1 \rightsquigarrow \leq \frac{3}{2}v(G) - \frac{3}{2}$

Fall 2 G hat Kreis C: $v(C) = 3$. Sei G' der Graph G nach Kontraktion von C

Claim G' hat keine parallele Kanten. Angenommen doch. Da G keine hatten, müssen sie zum neuen Knoten gehen und ursprünglich zu unterschiedlichen Knoten gehen $\rightarrow$ C_4 ↯

Claim G' hat keinen Kreis der Länge ≥ 4.



$\Rightarrow 2e(G') > 3v(G') - 3$, $v(G) = v(G') + 2$

$e(G) = e(G') + 3$

$\Rightarrow 2e(G) > 3v(G) - 3$ ↯

Folgen

Eine **Folge** ist eine Funktion f, die für alle natürlichen Zahlen definiert ist. Statt $f(n)$ schreibt man häufig a_n.

Folgen können **explizit** dargestellt werden, wo die Formel für a_n nur von n abhängt, zum Beispiel $a_n = n^2$.

Folgen können auch **rekursiv** beschrieben, wo die Formel von vorherigen Folgenglieder abhängen, zum Beispiel $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Fibonacci-Folge

561223

Eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ werde durch ihr Anfangsglied $x_1 = 1/6$ und danach schrittweise für $n = 1, 2, 3, \ldots$ durch die Bildungsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right)$$

bestimmt. Man ermittle x_{2016}.

$x_{n+2} = 5x_n + 7x_{n+1} + n$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2$

$x_1 = \frac{1}{6}$ $\quad x_2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\quad x_3 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\quad x_4 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\quad x_5 = \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

Vermutung: $x_n = \frac{n}{6}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$ ✓

$n \geq 1$: Angenommen, $x_n = \frac{n}{6}$. Zu zeigen: $x_{n+1} = \frac{n+1}{6}$

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{n+3}\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n+3}{6} = \frac{n+1}{6}$$

$\Rightarrow x_{2016} = 2016/6.$

Theo hat 8 Würfel mit den Seitenlängen $1, \dots, 8$.
Wie viele Möglichkeiten hat er, diese 8 Würfel zu einem Turm zu stapeln, wo auf einen Würfel der Seitenlänge k nur ein Würfel gesetzt werden darf, dessen Seitenlänge höchstens $k+2$ ist?

Sei x_n die Anzahl der Türme, wenn man n Würfel hat.
↳ Gesucht: x_8
Idee: Finde eine Rekursion für x_n.
Behauptung: $x_{n+1} = 3x_n \quad \forall \; n \geq 2$
Für jeden Turm mit n Würfeln gibt es 3 Möglichkeiten, den Würfel $n+1$ einzufügen (auf den Boden, auf n oder auf $n-1$).

Achtung: $x_2 \neq 3 \cdot x_1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_8 = 3 \cdot x_7 = 3 \cdot 3 \cdot x_6 = \dots = 3^6 \cdot x_2 = 2 \cdot 3^6$

Für $n \geq 1$ sei s_n die Anzahl der Elemente von $\{0,1\}^n$, die keine vier aufeinanderfolgenden Nullen oder Einsen haben.

$(0,1,0,0,\ldots,1)$

Was ist $s_{2026} \mod 3$?

$s_n = 2s_{n-1} - s_{n-4}$

Jedes valide Tupel der Länge $n-1$ kann man auf zwei Arten verlängern zu einem Tupel der Länge n, aber wir müssen die Tupel abziehen, wo dann vier Einsen oder v Nullen am Ende stehen, davon gibt es s_{n-4}.

$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}$ $\quad s_1 = 2,\ s_2 = 4,\ s_3 = 8$

Jedes valide Tupel der Länge n fängt entweder

- mit genau einer Eins an } s_{n-1} $\quad (1,0,\ldots)$
- einer Null } $(0,1,\ldots)$
- zwei Einsen } s_{n-2} $\quad (1,1,0,\ldots)$
- zwei Nullen } $(0,0,1,\ldots)$
- drei Einsen } s_{n-3}
- drei Nullen }

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_n \mod 3$	2	1	2	2	2	0	1	0	1

10	11	12	13	14	15	16
2	0	0	2	2	1	2

$2016 \mod 13 = 1$

Lösen von Rekursionen

Allgemein

Gegeben: Rekursion

$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$

Startwerte $a_0, \ldots, a_{k-1}$

Schritt 1: Berechne die k Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ charakteristischen Polynom

$x^k - c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k$

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ paarweise verschieden, dann ist die Lösung der Rekursion von der Form

$a_n = \lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \cdots + \lambda_k \cdot \alpha_k^n$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

Kommt eine Nullstelle α doppelt vor, zum Beispiel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, dann ist der zweite Summand nicht $\lambda_2 \cdot \alpha^n$, sondern $\lambda_2 \cdot n^1 \cdot \alpha^n$.

Bei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ ist der dritte Summand $\lambda_3 \cdot n^2 \cdot \alpha^n$ usw.

Beispiel

$a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2$

$a_0 = 0, \; a_1 = 1.$

Charakteristische Polynom: $x^2 - 2x + 5$

Nullstellen: $\alpha_1 = 1 + \sqrt{1 - 5}$

$= 1 + 2i$

$\alpha_2 = 1 - 2i$

α_1, α_2 verschieden

$\Rightarrow \; a_n = \lambda_1 \cdot (1+2i)^n + \lambda_2 \cdot (1-2i)^n$

Wie sähe die allgemeine Lösung aus, wenn das charakteristische Polynom die Nullstellen

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2$

hat?

Schritt 2: Nutze die gegebenen Startwerte $a_0, \dots, a_{k-1}$, um ein Gleichungssystem für $\gamma_1, \dots \gamma_k$ aufzustellen und diese zu bestimmen

$$0 = a_0 = \gamma_1 \cdot (1+2i)^0 + \gamma_2 \cdot (1-2i)^0$$
$$1 = a_1 = \gamma_1 \cdot (1+2i)^1 + \gamma_2 \cdot (1-2i)^1$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \gamma_1 + \gamma_2$$
$$1 = \gamma_1 \cdot (1+2i) + \gamma_2 \cdot (1-2i)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 = -\gamma_2$$
$$1 = -\gamma_2 (1+2i) + \gamma_2 \cdot (1-2i)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4i}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4i}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{4i}(1+2i)^n - \frac{1}{4i}(1-2i)^n$$

Aufgabe 1: Löse die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 1, \; a_1 = 2$

Aufgabe 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein $1 \times n$ Feld zu pakettieren, wenn man
- 1×3 Fliesen in 3 unterschiedlichen Farben
- 1×2 Fliesen in 5 unterschiedlichen Farben
- 1×1 Fliesen in einer Farbe zur Verfügung hat?

Zum Beispiel ist bei $n = 3$ die Antwort $3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 = 14$

Allgemein	Beispiel
Gegeben: Rekursion $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$ mit Konstanten $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ Startwerte $a_0, \ldots, a_{k-1}$	$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - n + 6 \quad \forall n \geq 2$ $a_0 = 1, \; a_1 = 1.$
Schritt 1: Ignoriere $f(n)$ und Startwerte und finde die allgemeine Lösung $\lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_k \alpha_k^n$ der homogenen Rekursion $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$. Bestimme $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ noch nicht!	$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 4$ $\Rightarrow \alpha_1 = 2, \; \alpha_2 = 2$ $\Rightarrow$ Allgemeine Lösung ist $\lambda_1 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n$.
Schritt 2: Finde irgendeine Lösung b_n der inhomogenen Rekursion $b_n = c_1 b_{n-1} + \cdots + c_k b_{n-k} + f(n)$ Die Startwerte müssen nicht passen	$b_n = -n+2$ erfüllt die Rekursion $b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2} - n + 6$ $-4(n-1)+8 \quad +4(n-2)-8 \quad -n+6$ $= -n+2$
Schritt 3: Die Lösung für a_n ist von der Form $a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_k \alpha_k^n + b_n$ Setze nun Startwerte $a_0, \ldots, a_{k-1}$ ein, um $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ auszurechnen.	$a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n - n + 2$ $1 = a_0 = \lambda_1 \quad + 2$ $1 = a_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1 + 2$ $\Rightarrow \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 1$ $\Rightarrow a_n = -2^n + n \cdot 2^n - n + 2$

How to do Schritt 2, wenn

$f(n) = p(n) \cdot q^n$

mit $q \in \mathbb{C}$ und $p(n)$ ein Polynom

Wenn q keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann gibt es eine Lösung von der Form

$b_n = r(n) \cdot q^n$, wobei $r(n)$ ein Polynom mit denselben Grad wie den von $p(n)$ ist

$f(n) = -n+6 = \underbrace{(-n+6)}_{p(n)} \cdot \underbrace{1^n}_{q^n}$

$\Rightarrow 1$ keine Nullstelle von $x^2 - 4x + 4$

$\Rightarrow b_n = (r_1 \cdot n + r_0) \cdot 1^n = r_1 \cdot n + r_0$

Wir setzen das in die Rekursion ein:

$r_1 \cdot n + r_0 = 4r_1(n-1) + 4r_0 - 4r_1(n-2) - 4r_0 - n + 6$

$= -n + 4r_1 + 6$

$\Rightarrow r_1 = -1, \; r_2 = 2$

$\Rightarrow b_n = -n + 2$

Ist q Nullstelle mit Vielfachheit k, dann ist $b_n = r(n) \cdot q^n$, wobei

$\deg r(n) = \deg p(n) + k$

Aufgabe 1: Löse die Rekursion $a_n = a_{n-2} + 2^{n-1} \quad \forall \; n \geq 2$

$a_0 = 0, \; a_1 = 1$

Aufgabe 2: Löse die Rekursion $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + 2 \cdot (-1)^n$

$a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = -1$

551142

Eine bekannte Mathematikerfamilie hat drei Kinder namens *Antonia*, *Bernhard* und *Christian*. Jeden Abend muss eines der Kinder den Aufwasch erledigen. Eines Tages entschließt sich ihr Vater, in Abhängigkeit vom Betragen seiner Kinder in den vorausgegangenen Wochen einen Aufwaschplan für die nächsten 55 Tage zu erstellen.

Es bezeichne x die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen Antonia mindestens einmal an zwei aufeinanderfolgenden Tagen an der Reihe ist. Ferner bezeichne y die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen es zwei aufeinanderfolgende Tage gibt, an deren erstem Antonia und an deren zweitem Bernhard an der Reihe ist.

Man entscheide, ob x und y verschieden sind und welche dieser beiden Zahlen gegebenenfalls größer ist.

Es sei (d_n) die Fibonacci Folge mod 10. Die ersten Folgenglieder sind also $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, \dots$, $d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \mod 10$

(i) Beweise, dass die Folge rein periodisch ist, d.h. es gibt ein l, sodass $d_i = d_{i+l}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(ii) Beweise, dass es für jedes n eine Fibonacci-Zahl gibt, die auf mind. n Nullen endet.

(i) Das nächste Glied hängt nur von den vorherigen zwei ab.
$\Rightarrow$ Sobald sich ein Paar wiederholt, ist die Folge periodisch, was nach höchstens $10 \cdot 10 = 100$ Paaren passiert
Außerdem kann man „rückwärts" gehen, d.h. aus d_n und d_{n-1} kann man eindeutig d_{n-2} berechnen $d_{n-2} = d_n - d_{n-1} \mod 10$
$\Rightarrow$ Die Folge ist rein periodisch.

(ii) Es sei d'_m die Fibonacci Zahlen mod 10^n. F_n endet auf (mind.) n Nullen, genau dann wenn $d'_m = 0$.
Wie in (i) kann man sehen, dass (d'_m) rein periodisch ist. Der Wert direkt vor $1, 1, 2, 3, 5, 8$ muss 0 sein
$\Rightarrow \exists$ unendlich viele m mit $d'_m = 0$

Lösen von Rekursionen

Allgemein

Gegeben: Rekursion

$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$

Startwerte $a_0, \dots, a_{k-1}$

Schritt 1: Berechne die k Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ charakteristischen Polynom

$x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_k$

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ paarweise verschieden, dann ist die Lösung der Rekursion von der Form

$a_n = \lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \dots + \lambda_k \cdot \alpha_k^n$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

Kommt eine Nullstelle α doppelt vor, zum Beispiel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, dann ist der zweite Summand nicht $\lambda_2 \cdot \alpha^n$, sondern $\lambda_2 \cdot n^1 \cdot \alpha^n$.

Bei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ ist der dritte Summand $\lambda_3 \cdot n^2 \cdot \alpha^n$ usw.

Beispiel

$a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 0, \; a_1 = 1.$

$x^n = 2x^{n-1} - 5x^{n-2} \quad | : x^{n-2}$

$x^2 = 2x - 5 \quad \Leftrightarrow \; x^2 - 2x + 5$

Charakteristische Polynom: $x^2 - 2x + 5$

Nullstellen:

$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$

$\alpha_1 = 1 + 2i, \quad \alpha_2 = 1 - 2i$

α_1, α_2 verschieden

$\Rightarrow \; a_n = \lambda_1 (1+2i)^n + \lambda_2 (1-2i)^n$

Wie sähe die allgemeine Lösung aus, wenn das charakteristische Polynom die Nullstellen

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2$

hat?

$a_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 2^n + \lambda_3 \cdot n \cdot 1^n + \lambda_4 \cdot n \cdot 2^n + \lambda_5 \cdot n^2 \cdot 2^n$

Schritt 2: Nutze die gegebenen Startwerte $a_0, \dots, a_{k-1}$, um ein Gleichungssystem für $\lambda_1, \dots \lambda_k$ aufzustellen und diese zu bestimmen

$$0 = a_0 = \lambda_1 \cdot (1+2i)^0 + \lambda_2 \cdot (1-2i)^0$$

$$1 = a_1 = \lambda_1 (1+2i)^1 + \lambda_2 \cdot (1-2i)^1$$

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 (1+2i) + \lambda_2 \cdot (1-2i) \\ &= -\lambda_2 (1+2i) + \lambda_2 \cdot (1-2i) \\ &= -4i\, \lambda_2 \end{aligned}$$

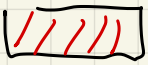
$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4i}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{4i}$$

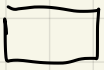
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{4i} \cdot (1+2i)^n - \frac{1}{4i} (1-2i)^n$$

Aufgabe 1: Löse die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 1, \; a_1 = 2$

$$a_n = \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} 3^n$$





$$a_3 = 1 \cdot a_2 + 5 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0$$

Aufgabe 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein $1 \times n$ Feld zu pakettieren, wenn man
- 1×3 Fliesen in 3 unterschiedlichen Farben
- 1×2 Fliesen in 5 unterschiedlichen Farben
- 1×1 Fliesen in einer Farbe zur Verfügung hat?

Zum Beispiel ist bei $n=3$ die Antwort $3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 = 14$

$$a_n = a_{n-1} + 5 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot a_{n-3}$$

$a_1 = 1, \; a_2 = 6, \; a_3 = 14$

$a_0 = 1$

$(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x+1) = (x^2 - 2x - 3)$

$x^3 + x^2$

$-2x^2 - 5x - 3$

$-2x^2 - 2x$

$-3x - 3$

$1 \pm \sqrt{1+3} = 3$

-1

$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 3$

$$a_n = \lambda_1 \cdot (-1)^n + \lambda_2 \cdot n\,(-1)^n + \lambda_3 \cdot 3^n$$

- $1 = a_0 = \lambda_1 \cdot (-1)^0 + \lambda_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 + \lambda_3 \cdot 3^0$
-
-

Es sei t_n die Anzahl der Elemente in $\{0,1,2\}^n$, wo auf eine 2 nie unmittelbar eine 0 folgt.

Finde eine Rekursion für t_n.

$t_1 = 3, \quad t_2 = 8$

$t_0 = 1$

s_n = Anzahl der Elemente in $\{0,1,2\}^n$, wo auf eine 2 niemals eine 0 folgt, und die mit 2 beginnt.

$t_n = s_n + 2t_{n-1} \iff s_n = t_n - 2t_{n-1}$

$s_{n-1} = t_{n-1} - 2t_{n-2}$

$s_n = t_{n-2} + s_{n-1}$

$t_n - 2t_{n-1} = t_{n-2} + s_{n-1}$

$= t_{n-2} + t_{n-1} - 2t_{n-2}$

$t_n = 3t_{n-1} - t_{n-2}$

Allgemein

Gegeben: Rekursion

$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$

Startwerte $a_0, \ldots, a_{k-1}$

Schritt 1: Ignoriere $f(n)$ und Startwerte und finde die allgemeine Lösung $\lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_k \alpha_k^n$ der homogenen Rekursion

$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Bestimme $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ noch nicht!

Schritt 2: Finde irgendeine Lösung b_n der inhomogenen Rekursion

$b_n = c_1 b_{n-1} + \cdots + c_k b_{n-k} + f(n)$

Die Startwerte müssen nicht passen

Schritt 3: Die Lösung für a_n ist von der Form

$a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_k \alpha_k^n + b_n$

Setze nun Startwerte $a_0, \ldots, a_{k-1}$ ein, um $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ auszurechnen.

Beispiel

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - n + 6 \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

Char. Polynom: $x^2 - 4x + 4$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 2$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n$

$b_n = -n+2$ erfüllt die Rekursion

$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2} - n + 6$

$-4(n-1)+8 \quad +4(n-2)-8 \quad -n+6$

$= -n+2$

$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n - n + 2$

$0 = a_0 = \lambda_1 \cdot 2^0 + 2 = \lambda_1 + 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2$

$1 = a_1 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 - 1 + 2$

$= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2$

$a_n = -2 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n - n + 2$

How to do Schritt 2, wenn

$f(n) = p(n) \cdot q^n$

mit $q \in \mathbb{C}$ und $p(n)$ ein Polynom

Wenn q keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann gibt es eine Lösung von der Form

$b_n = r(n) \cdot q^n$, wobei $r(n)$ ein Polynom mit denselben Grad wie den von $p(n)$ ist

$-n+6 = \underbrace{(-n+6)}_{p(n)} \cdot \underbrace{1^n}_{q^n}$

$b_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 1^n = r_0 + r_1 \cdot n$

$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2} - n + 6$

$r_0 + r_1 \cdot n = 4(r_0 + r_1 \cdot (n-1)) - 4(r_0 + r_1 \cdot (n-2)) - n + 6$

$r_0 + r_1 \cdot n = (4r_0 - 4r_1 - 4r_0 + 8r_1 + 6) + (4r_1 - 4r_1 - 1)n$

$r_0 + r_1 \cdot n = (4r_1 + 6) - n$

$\hookrightarrow \; r_0 = 4r_1 + 6 \Rightarrow r_0 = 2$

$r_1 = -1$

$\Rightarrow b_n = -n + 2$

Ist q Nullstelle mit Vielfachheit k, dann ist $b_n = r(n) \cdot q^n$, wobei

$\deg r(n) = \deg p(n) + k$

Aufgabe 1: Löse die Rekursion $a_n = a_{n-2} + 2^{n-1} \quad \forall\, n \geq 2$

$a_0 = 0, \; a_1 = 1$

$a_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{6}\left(-(-1)^n + 2^{n+2} - 3\right)$

Aufgabe 2: Löse die Rekursion $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + 2 \cdot (-1)^n$

$a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = -1$

$a_n = i^n + (-i)^n + (n-1)(-1)^n$

551142

Eine bekannte Mathematikerfamilie hat drei Kinder namens *Antonia*, *Bernhard* und *Christian*. Jeden Abend muss eines der Kinder den Aufwasch erledigen. Eines Tages entschließt sich ihr Vater, in Abhängigkeit vom Betragen seiner Kinder in den vorausgegangenen Wochen einen Aufwaschplan für die nächsten 55 Tage zu erstellen.

Es bezeichne x die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen Antonia mindestens einmal an zwei aufeinanderfolgenden Tagen an der Reihe ist. Ferner bezeichne y die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen es zwei aufeinanderfolgende Tage gibt, an deren erstem Antonia und an deren zweitem Bernhard an der Reihe ist.

Man entscheide, ob x und y verschieden sind und welche dieser beiden Zahlen gegebenenfalls größer ist.

481041

Anton und Bärbel spielen folgendes Spiel: Von einem Stapel mit 100 Karten ziehen sie abwechselnd entweder 2, 5 oder 6 Karten. Den ersten Zug führt stets Anton aus. Gewonnen hat, wer den letzten erlaubten Zug machen kann.

Untersuchen Sie, wer von beiden den Sieg erzwingen kann, und geben Sie eine Gewinnstrategie an.

Erstelle eine Gewinn / Verlust - Tabelle

# Karten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Gewinn/Verlust für den der dran ist	V	V	G	G	V	G	G	G	V	G	G	V	V

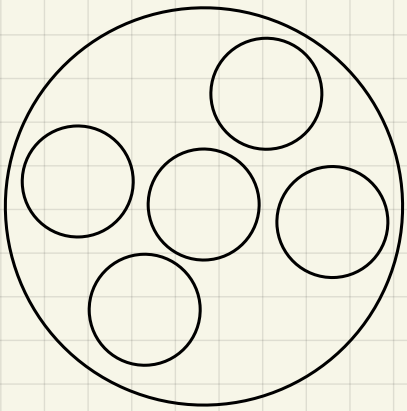
↳ Periode der Länge 11

Beweise es mit vollständiger Induktion

$100 \equiv 1 \mod 11$

Gegeben ist ein Kreis K mit Radius 10. Abwechselnd zeichnen Aron und Brigitte Kreise mit Radius 1 in K, wobei sich keine Kreise schneiden dürfen. Wer das nicht mehr kann, verliert. Welcher Spieler hat die Gewinnstrategie

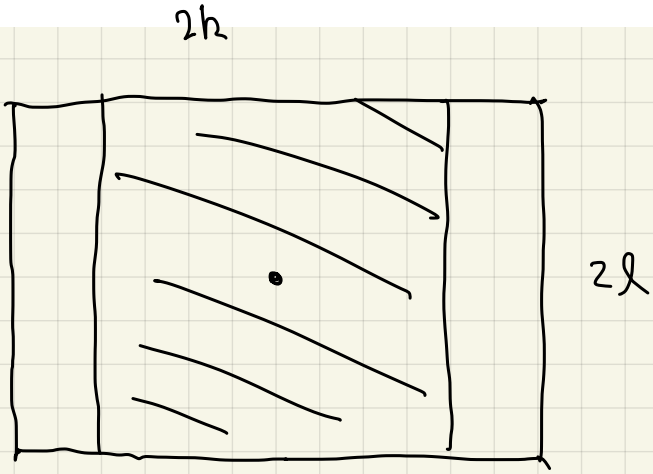
Der Erste hat die Gewinnstrategie.



- Zeichne den ersten Kreis um den Mittelpunkt K
- Spiegele ab dann jeden Zug vom Gegner um den Mittelpunkt

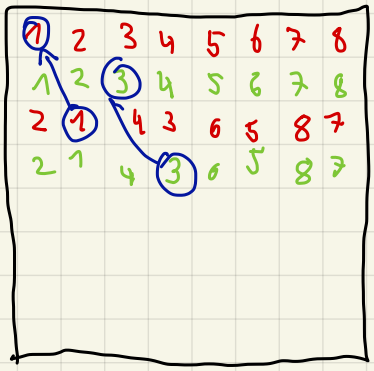
BWM 2015. 2. 1

Ein Rechteck mit Seitenlängen a und b wird in $a \cdot b$ Einheitsquadrate aufgeteilt (a, b sind positive ganze Zahlen, ~~beide gerade~~).
Anja und Bernd färben nun abwechselnd jeweils ein Quadrat, das aus einem oder mehreren bislang noch ungefärbten Einheitsquadraten dieses Rechtecks besteht. Wer nicht mehr färben kann, hat verloren.
Anja beginnt. Bestimme alle Paare (a,b), für die sie den Gewinn erzwingen kann.



Alice und Bob spielen folgendes Spiel. Alice platziert einen Springer auf irgendein Feld eines 8×8 - Schachbretts. Ab dann ziehen Bob und Alice diesen ~~Springer~~ König abwechselnd, wobei sie nie auf ein Feld ziehen dürfen, auf das der Springer bereits war. Wer nicht mehr ziehen kann verliert. Wer hat eine Gewinnstrategie?

Pairing Strategy



Das Spiel ist endlich und Alice verliert, wenn alle Felder besucht werden.

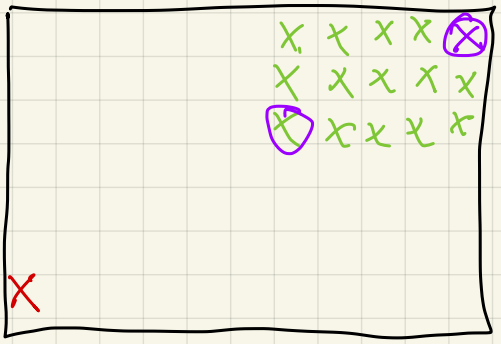
↳ Bob sollte versuchen das zu erreichen

Alice? Bob?

Aufgabe 17. Während alle anderen komische Spiele spielen, essen Silas und Fabien Kekse. Diese liegen am Anfang in einem $n \times m$ Rechteck. Der Keks in der unteren, linken Ecke enthält Orangengelee und schmeckt somit widerlich (diese Tatsache muss nicht bewiesen werden). Silas und Fabien machen nun abwechselnd Züge, wo sie stets einen noch verbleibenden Keks sowie sämtliche Kekse, die sowohl oberhalb als auch rechts von dem gewählten Keks liegen, in ihre jeweiligen Mägen performen. Für welche m und n kann Silas als Beginnender dafür sorgen, dass Fabien den ekelhaften Keks essen muss?

Strategy Stealing: Das Spiel ist endlich. Angenommen, der Zweite hat eine Gewinnstrategie. Dann hat er eine Antwort auf den ersten Zug, wo nur der Keks oben rechts gegessen wird. Aber diese Stellung kann man auch direkt im ersten Zug erreichen ↯ ⇝ Silas hat eine Gewinnstrategie, außer wenn $n=m=1$

Bis heute ist keine explizite Gewinnstrategie bekannt.



Beim Maker-Breaker-Dreiecksspiel spielen Maker und Breaker auf einem vollständigen Graphen mit n Knoten. In jeder Runde färbt Maker eine noch ungefärbte Kante rot und Breaker danach q ungefärbte Kanten blau.
Maker gewinnt, wenn am Ende ein rotes Dreieck entstanden ist. Ansonsten gewinnt Breaker.

(i) Zeige, dass bei $q < \sqrt{2n+2} - 5/2 \approx 1.414\sqrt{n}$ Maker eine Gewinnstrategie hat

(ii) Zeige, dass bei $q \geq 2\sqrt{n}$ Breaker eine Gewinnstrategie hat.

Note. Bis heute ist nicht bekannt was das kleinste q ist für welches Breaker eine Gewinnstrategie hat.
Alles, was wir wissen, ist $q \in [1.414\sqrt{n}, 1.633\sqrt{n}]$.

Die Probabilistische Methode

Eine Zufallsvariable X nimmt zufällige Werte an, z. B. die Augenzahl eines fairen Würfels. Hier gilt

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{6}, \dots, \quad \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}.$$

Ist X eine Zufallsvariable und Ω die (höchstens abzählbar unendliche) Menge an Werten, die sie annehmen kann, dann ist der Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(X=w) \cdot w.$$

Beispiel Würfel: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5.$

linearity of expectation: Sind X und Y zwei Zufallsvariablen und $a \in \mathbb{C}$ eine Konstante, so gilt $\mathbb{E}[a \cdot X] = a \cdot \mathbb{E}[X]$

und $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

selbst wenn X und Y abhängig sind.

↖ wenn $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ endlich

Suppose, there are 100 babies in a circle. At the same time, each baby either pokes the baby to his left or to his right independently and uniformly at random. Every baby that is poked starts to giggle.

(i) What is the expected number of giggling babies?

(ii) Do we really need that the babies pick their side independently from each other?

(iii) What is the smallest possible number of giggling babies? 50

(i) Es sei X die Anzahl an kichernden Babys. Gesucht: $\mathbb{E}[X]$

Die Babys seien $B_1, \dots, B_{100}$ und $X_i = \begin{cases} 1 & B_i \text{ kichert} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

↖ Indikatorvariable

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + X_3 \dots + X_{100}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100}]$

$\overset{\checkmark}{=} \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_{100}]$

$= 100 \cdot 3/4 = 75$

$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}(X_i=1) \cdot 1 + \mathbb{P}(X_i=0) \cdot 0$

$= \mathbb{P}(X_i = 1)$

$= \frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(B_i \text{ wird nicht von links und nicht von rechts gepiekst})$$

unabhängig

$$= 1 - \mathbb{P}(B_i \text{ wird nicht von links gepiekst}) \cdot \mathbb{P}(B_i \text{ nicht von rechts})$$

$$= 1 - 1/2 \cdot 1/2$$

$$= 3/4$$

B G B G G B $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$

At the cinema, 7 boys and 13 girls sit in a row in a uniformly at random order. What is the expected number of times, a boy and a girl sit directly next to each other?

Es sei X die Anzahl an Positionen, wo ein Junge direkt neben einem Mädchen sitzt.

Gesucht: $\mathbb{E}[X]$. Seien die Plätze von links nach rechts mit $P_1, \dots, P_{20}$ beschriftet. Für $i = 1, \dots, 19$ sei $X_i = \begin{cases} 1 & \text{auf } P_i, P_{i+1} \text{ sitzt genau ein Junge und ein M.} \\ 0 & \end{cases}$

$\Rightarrow X = X_1 + \dots + X_{19}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_{19}]$

$= 19 \cdot 2 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19}$

$= 9{,}1$

$\mathbb{E}[X_i] = \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19} + \frac{13}{20} \cdot \frac{7}{19}$

$= 2 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19}$

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2, \dots, 10\}$

For the winter, squirrel Sandy has collected 2^{10} acorns. She labels each acorn with a subset of $[10]$ such that each subset appears exactly once. During her hibernation, she has the following approach in eating the acorns: Each day, she wakes up and picks a still existing acorn A uniformly at random and independent from her previous days. Then she eats A together with all acorns that have a label that is a subset of the label of A.

What is the expected number of days until Sandy runs out of acorns?

$\{1,2,\dots,10\}$

Es sei X die Anzahl der Tage, für die ihr Vorrat reicht. Gesucht: $\mathbb{E}[X]$.

Für jedes $A \subseteq [10]$ sei $X_A = \begin{cases} 1 & \text{Sandy wählt an einem Tag } A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow X = \sum_{A \subseteq [10]} X_A$

$\mathbb{E}[X_A] = P(X_A = 1) = \frac{1}{\#\text{Mengen, die } A \text{ enthalten}} = \frac{1}{2^{10-|A|}}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{A \subseteq [10]} \mathbb{E}[X_A]$

$= \sum_{i=0}^{10} \#A \text{ mit } |A| = i \cdot \frac{1}{2^{10-i}}$

$= \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} \cdot 1^i$

$= \left(\frac{1}{2} + 1\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \approx 54$

Es seien $S_1, \dots, S_{2^{n-1}-1} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, M\}$, sodass $|S_i| = n$ für alle $i \in \{1, \dots, 2^{n-1}-1\}$. Zeige, dass man die Zahlen $1, \dots, M$ in rot und blau einfärben kann, sodass kein S_i nur Zahlen derselben Farbe enthält.

$n \geq 2$

Färbe $1, \dots, M$ zufällig in rot und blau; uniform zufällig und unabhängig

$X = \#$ Mengen $S_1, \dots, S_{2^{n-1}-1}$, die nur aus einfarbigen Zahlen bestehen.

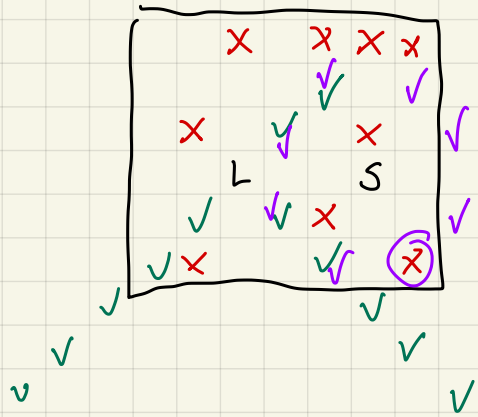
$X_i = \begin{cases} 1 & S_i \text{ einfarbig} \\ 0 \end{cases}$

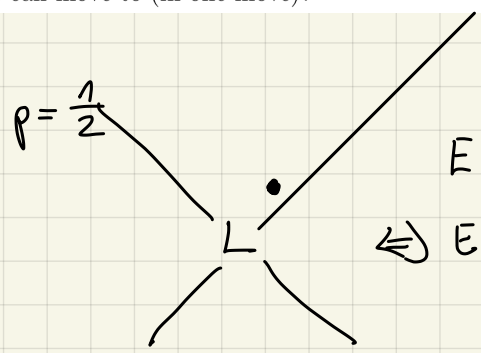
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_{2^{n-1}-1}] \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \dots + \mathbb{P}(X_{2^{n-1}-1} = 1) \\ &= \frac{2}{2^n} + \dots + \frac{2}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^{n-1}} \cdot (2^{n-1} - 1) \\ &< 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Färbung mit $x < 1$

$\Rightarrow$ mit $x = 0$

Exercise 2.3 (NIMO 4.3)**.** One day, a bishop and a knight were on squares in the same row of an infinite chessboard, when a huge meteor storm occurred, placing a meteor in each square on the chessboard independently and randomly with probability p. Neither the bishop nor the knight were hit, but their movement may have been obstructed by the meteors. For what value of p is the expected number of valid squares that the bishop can move to (in one move) equal to the expected number of squares that the knight can move to (in one move)?





$E = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(E+1)$

$\Leftrightarrow E = 1$

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}[\#\text{ erreichbaren Felder}] = 4$

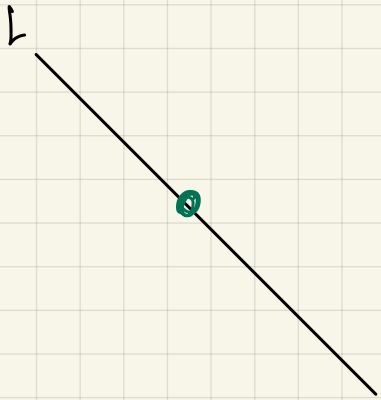
$p = 1 \Rightarrow \mathbb{E} = 0$

Springer: $8 \cdot (1-p)$

Läufer $p \cdot 0 + (1-p) \cdot (E+1) = E \quad \Leftrightarrow \quad 1 - p = p \cdot E$

$\frac{1-p}{p} = E$

$8 \cdot (1-p) = 4 \cdot \frac{1-p}{p} \Leftrightarrow 2p = 4$ oder $(1-p) = 0$



$I_k = \begin{cases} 1 & k\text{-te Feld der Diagonale erreichbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(I_k = 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

$$= \frac{1}{1-(1-p)} - 1$$

$$= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

An einer Klausur nahmen 240 Studenten teil. Es gab 8 Aufgaben. Jede Aufgabe wurde von mindestens 160 Studenten gelöst. Zeige, dass man zwei Studenten wählen kann, sodass jede Aufgabe von mindestens einem von den beiden gelöst wurde.

Wir wählen die beiden Studenten A und B zufällig und unabhängig voneinander

$\mathbb{P}$(Aufgabe 1 wurde weder von A noch von B gelöst)

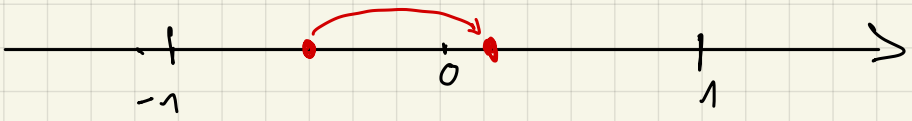
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$\mathbb{E}$[# Aufgaben, die weder von A noch B gelöst wurden]

$= 8 \cdot \frac{1}{9} < 1$

Problem 2.1 (Romania 2004). Prove that for any complex numbers $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ satisfying $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$, there exist $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ such that

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k \right| \leq 1.$$



Wir wählen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Sei $X = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k$

Ziel: $\mathbb{E}[|X|] \leq 1$ $\quad \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right|\right] \leq 1$

$$\mathbb{E}[|X|^2] = \mathbb{E}[X \cdot \overline{X}]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} \varepsilon_\ell \overline{z_\ell}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \varepsilon_k z_k \varepsilon_\ell \overline{z_\ell}\right]$$

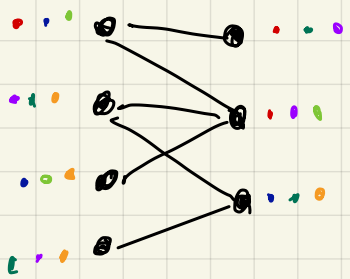
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} z_k \overline{z_\ell}\, \mathbb{E}[\varepsilon_k \cdot \varepsilon_\ell]$$

$\mathbb{E}[\varepsilon_k \cdot \varepsilon_\ell] = 0$ für $k \neq \ell$, $= 1$ für $k = \ell$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z_k} \cdot 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = 1$$

Es sei G ein bipartiter Graph mit $2^n - 1$ Knoten. Jeder Knoten v habe eine Liste $L(v)$ mit n Farben. Zeige, dass man jedes v mit einer Farbe aus $L(v)$ einfärben kann, sodass keine Kante gleichfarbige Endpunkte hat



In Barbieland, each Barbie likes at least one Ken. Show that one can throw a party, inviting at least half of the people in Barbieland, such that each Barbie at the party likes an odd number of Kens at the party.

421343

Gegeben ist ein Quadratgitter aus $N \times N$ Kästchen; N sei eine ungerade Zahl größer oder gleich 3. Die Raupe Nummersatt sitzt in dem Kästchen genau in der Mitte des Gitters. Jedes der übrigen Kästchen enthält eine positive ganze Zahl. Über die Verteilung der Zahlen ist nur bekannt, dass sich in keinen zwei Feldern die gleiche Zahl befindet.

Nummersatt möchte durch dieses Zahlenmeer einen Weg nach draußen finden. Sie kann dabei von einem Kästchen stets nur zu einem entlang einer Seite angrenzenden Kästchen weiterwandern und muss jede Zahl fressen, durch deren Kästchen ihr Weg führt. Jede Zahl n wiegt $\frac{1}{n}$ kg, und Nummersatt kann insgesamt nicht mehr als 2 kg Zahlen fressen.

Man untersuche

a) für $N = 2003$,

b) für alle ungeraden Zahlen $N \geq 3$,

ob die Zahlen im Gitter so ungünstig verteilt sein können, dass Nummersatt keinen Weg nach draußen finden kann, auf dem höchstens 2 kg Zahlen liegen.

Doppeltes Abzählen

Sei M eine endliche Menge. Wenn du zwei Wege findest, M zu zählen, also $|M| = c_1$

$|M| = c_2$,

dann gilt $c_1 = c_2$.

Beweise für alle $n \geq 0$.

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Sei $M = \{(d_1, d_2, \dots, d_n) \mid d_i \in \{0,1,2\}\}$

1. Möglichkeit M zu zählen: Jedes d_i hat 3 Möglichkeiten $\rightsquigarrow |M| = 3^n$

2 Möglichkeit: wähle erst, wieviele Ziffern nich 0 sein sollen (k) Dann wähle diese k Ziffern, $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Anschließend hat jede der k Ziffern zwei Möglichkeiten $\rightsquigarrow |M| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k$

$\Rightarrow 3^n = |M| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

zeige für alle $0 \leq r \leq n$

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Sei $M = \{ S \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |S| = r+1 \}$

1. Möglichkeit: Nach Definition ist $|M| = \binom{n+1}{r+1}$

Für $i = 1, \dots, n-r+1$ sei

$M_i = \{ S \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |S| = r+1, \min S = i \}$

$|M_i|$ = # Möglichkeiten aus $\{i+1, i+2, \dots, n+1\}$, r Elemente auswählen

$n = 4 \quad r = 1$

$M = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$

$M_1 = \{12, 13, 14, 15\}$ $\binom{4}{1}$

$M_2 = \{23, 24, 25\}$ $\binom{3}{1}$

$M_3 = \{34, 35\}$ $\binom{2}{1}$

$M_4 = \{45\}$ $\binom{1}{1}$

$$= \binom{n-i+1}{r}$$

$$|M| = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_{n+r-1}|$$

$$= \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \cdots + \binom{n-(n-r+1)+1}{r}$$

$$= \binom{n}{r} + \cdots + \binom{r}{r}$$

Zeige für alle $0 \leq r \leq n$

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r} = 2^{n-r}\binom{n}{n-r}$$

Sei A die Anzahl, aus n Personen eine beliebige Anzahl an Menschen in eine Kommission zu wählen und aus der Kommission r Menschen in den Vorstand zu wählen.

1. Möglichkeit: Für jede Kommissionsgröße k gibt es erst $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten für die Kommission und dann $\binom{k}{r}$ Mögl. für den Vorstand $\Rightarrow A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r}$

2. Möglichkeit: Wähle erst, welche r Leute in dem Vorstand sein sollen $\rightsquigarrow \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Für die n-r Leute, die nicht im Vorstand sind, gibt es dann jeweils 2 Mögl.: In der Kommission oder nicht in der Kommission.

$$A = \binom{n}{n-r} 2^{n-r}$$

Zeige für alle $i, d, f \in \mathbb{N}$ mit $i \leq f$ und $d \leq f$

$$\sum_{j=0}^{d} j \cdot \binom{i}{j}\binom{f-i}{d-j} = i \cdot \binom{f-1}{d-1}$$

(# Frauen: $\binom{i}{j}$; # Männer: $\binom{f-i}{d-j}$)

Wir haben i Frauen und f-i Männer.

Sei A die Anzahl an Mögl. eine Frau als Präsidentin zu wählen und aus den übrigen (f-1) Menschen, d-1 Minister/innen zu wählen.

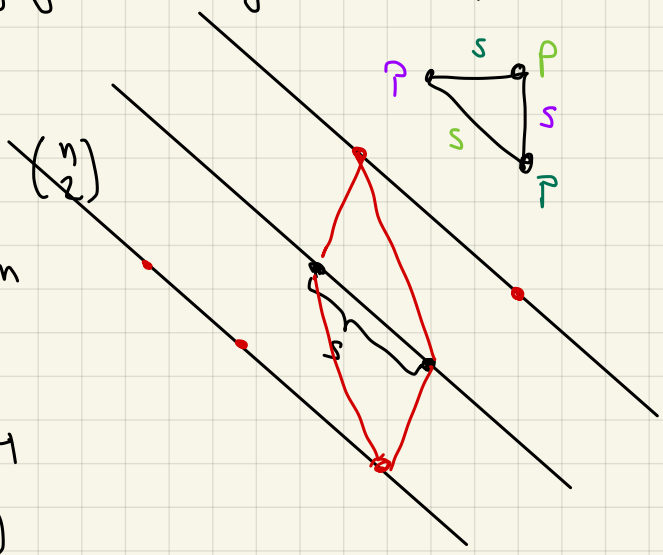
1. Möglichkeit. $i \cdot \binom{5-1}{4-1}$ ← Mögl. für Minister.

↖ Mögl. für Präsidentin

2. Mögl. Wähle erst wieviele von den Ministern + Präsidentin Frauen sein sollen $(j = 0, \dots, 4)$. Dann haben wir $\binom{i}{j}$ Mögl. die j Frauen für die Ämter zu wählen, $\binom{5-i}{4-j}$ Mögl. die männlichen Posten zu besetzen. und j Möglichkeiten, aus den j gewählten Frauen eine Präsidentin zu wählen $\Rightarrow A = \sum_{j=0}^{4} j \cdot \binom{i}{j}\binom{5-i}{4-j}$

Suppose there are n points in the plane such that no three of them are on a line. Show that the number of triangles whose vertices are chosen from these n points and whose area is exactly 1 at most $\frac{2}{3}(n^2 - n)$

Seien n Punkte in der Ebene und D die Anzahl der Dreiecke vom Flächeninhalt genau 1. Wir zählen die Anzahl A der Paare (s, P), wobei s eine Seite und P der gegenüberliegende Eckpunkt eines Dreiecks vom Flächeninhalt 1 ist.



1. Möglichkeit: Wähle erst s. $\rightsquigarrow \binom{n}{2}$

Dann gibt es höchstens vier P, die ein Dreieck mit Inhalt 1 bilden

$$\Rightarrow A \leq \binom{n}{2} \cdot 4 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4$$

$$= 2(n^2 - n)$$

2. Möglichkeit. Für jedes Dreieck mit Inhalt 1 kriegen wir 3 Paare

$$A = 3D$$

$$\Rightarrow \quad 3D = A \leq 2(n^2 - n)$$

$$\Rightarrow \quad D \leq \frac{2}{3}(n^2 - n)$$

IMO 1998/2

In a competition, there are a contestants and b judges, where $b \geq 3$ is an odd integer. Each judge rates each contestant as either "pass" or "fail". Suppose k is a number such that for any two judges, their ratings coincide for at most k contestants. Prove that

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

A permutation is called **graceful** if the absolute differences between successive elements are distinct.

Prove that if the set of elements in even-indexed positions of a graceful permutation of $[2n]$ is $[n]$, then the first and last elements differ by n.

One example is $5, 4, 6, 3, 7, 2, 8, 1$.

Beweise für alle $n \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3.$$

Gegeben sei ein Schachbrett mit gewöhnlicher Schwarz/Weiß-Färbung. Pro Zug darf man eine Zeile oder Spalte auswählen und alle Farben der Felder dieser Zeile/Spalte flippen. Ist es möglich, dass nach einer endlichen Anzahl an Zügen genau ein Feld schwarz ist?

Was ist die kleinste (also inklusionsminimale) Menge M mit den folgenden Eigenschaften:

1) $1 \in M$

2) Wenn $x \in M$, dann ist auch $x+1 \in M$

3) Wenn $x \in M$, dann ist auch $\frac{x}{x+1} \in M$.

- Alle natürlichen Zahlen sind in M (induktiv mit 1) und 2))
- Alle Zahlen in M sind positiv (1 ist positiv und 2), 3) geben nur positive Zahlen zurück)
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ sind in M
- Nur rationale Zahlen sind in M, (Da 1 rational und

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{Q}$$

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{x+1} \in \mathbb{Q}$$)

Jede rationale Zahl ist von der Form $\frac{p}{q}$.

2') Wenn $\frac{p}{q} \in M$, dann ist auch $\frac{p+q}{q} \in M$

3') Wenn $\frac{p}{q} \in M$, dann ist auch $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{p}{p+q} \in M$.

Vermutung: $M = \mathbb{Q}_+$

Was müssen wir beweisen?

1. Wenn M die drei Bedingungen erfüllt, dann ist jedes (positive ✓) $\frac{p}{q} \in M$

2. $\mathbb{Q}_+$ erfüllt 1), 2), 3) Das ist sehr einfach

Wie können wir 1. zeigen?

$$\frac{12}{5} \overset{2'}{\leftarrow} \frac{7}{5} \overset{2'}{\leftarrow} \frac{2}{5} \overset{3'}{\leftarrow} \frac{2}{3} \overset{3'}{\leftarrow} \frac{2}{1} \overset{2'}{\leftarrow} \frac{1}{1} \quad \text{nach 1)}$$

Induktion über $p+q$

Base case $p+q = 2 \Rightarrow \frac{p}{q} = 1 \Rightarrow \checkmark$ nach 1)

Induktions annahme: Angenommen für ein $k \geq 2$ wissen wir, dass für alle p, q mit $p+q \leq k$ gilt dass $\frac{p}{q} \in M$.

Zu zeigen: Für alle p, q mit $p+q \leq k+1$ gilt, dass $\frac{p}{q} \in M$.

Ist $p = q$, dann ist $\frac{p}{q} = 1 \in M$ ✓

Ist $p < q$, dann wissen wir nach Ind. annahme, dass $\frac{p}{q-p} \in M$

Also ist nach 3') auch $\frac{p}{q} \in M$.

Ist $p > q$, dann wissen wir nach Ind. annahme, dass $\frac{p-q}{q} \in M$

Also ist nach 2') auch $\frac{p}{q} \in M$.

Es seien $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$, sodass

$S := a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$ ~~64~~

Beweise, dass $4 \mid n$.

Wie verändert sich S, wenn ich bei einem a_i das Vorzeichen ändere?

a_i kommt in vier Summanden vor; diese verändern alle ihr Vorzeichen

$4+$	$\to$	$4-$	$\rightsquigarrow$	-8
$3+$ $1-$	$\to$	$3-$ $1+$	$\rightsquigarrow$	-4
$2+$ $2-$	$\to$	$2-$ $2+$	$\rightsquigarrow$	0
			$\rightsquigarrow$	4
			$\rightsquigarrow$	8

Invariante!

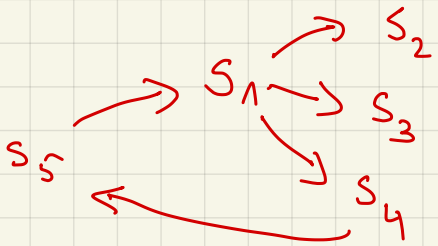
S verändert sich nicht mod 4.

Switche alle a_i zu positiven Vorzeichen, dann ist $S = n$

Also $n \equiv 0 \bmod 4$.

n Punkte auf einer Ebene sind gegeben. Wir markieren die Mittelpunkte aller Verbindungsstrecken zwischen zwei der n Punkte. Beweise, dass mindestens $(2n-3)$ verschiedene Punkte markiert werden.

Jeder Teilnehmer eines Turniers spielt gegen jeden anderen genau einmal, wobei Unentschieden unmöglich ist. Nach dem Turnier legt jeder Spieler eine Liste der Namen aller Spieler an, die ~~entweder~~ von ihm geschlagen wurden, oder die von Spielern geschlagen wurden, die von ihm geschlagen wurden. Zuletzt setzt er seinen eigenen Namen auf die Liste. Beweise, dass die Liste irgendeines Spielers alle Namen enthält.



Extremalprinzip

Auf einer Party sei jeder Gast mit mindestens einem anderen Gast befreundet. Wenn zwei Gäste mit derselben Anzahl an Menschen befreundet sind, dann haben sie keinen gemeinsamen Freund. Zeige: Es gibt einen Gast mit genau einem Freund.

Zahlentheorie

541033

Es sei $P = (p_1, p_2, ...)$ die der Größe nach geordnete Folge der Primzahlen. Weiter sei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner als n.

(a) Bestimmen Sie $\pi(k) + k$ für $k = 54$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine positive ganze Zahl k so gibt, dass n in der Form $n = \pi(k) + k$ oder $n = p_k + k$ dargestellt werden kann.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53

a) $\pi(54) = 16 \rightsquigarrow \pi(54) + 54 = 70$

b)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi(k)+k$	1	2	4	6	7	9	10	12	13
$p_k + k$	3	5	8	11	16	19			

↳ $\pi(k)+k$ erhöht sich um 1 oder 2. Wenn k eine Primzahl ist, ist $\pi(k+1)+(k+1) - (\pi(k)+k) = 2$

Angenommen, es gibt ein n, welches nicht als $\pi(k)+k$ oder p_k+k geschrieben werden kann.
Weil $\pi(k)+k$ immer um 1 oder 2 steigt, wissen wir, dass es ein l gibt, sodass

(*) $n-1 = \pi(l)+l$

$n+1 = \pi(l+1)+l+1$

Da $\pi(l+1) - \pi(l) = 1$ ist, muss l prim sein.

D.h. $\exists m$, sodass $l = p_m$

Behauptung: $n = p_m + m$

Beweis: $p_m + m = l + m = l + \underbrace{\pi(l)+1}_{=m, \text{ weil } \pi(l) = m-1 \text{ nach Def. von } \pi(l)} \overset{(*)}{=} n$ □

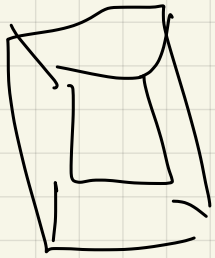
Widerspruch!

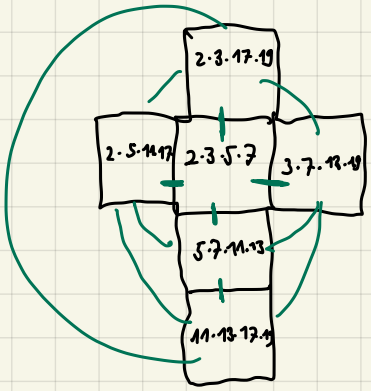
540936

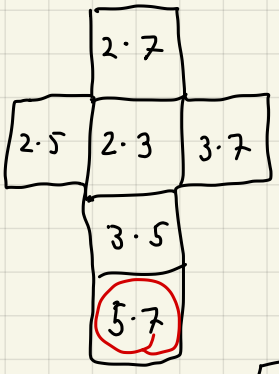
Die sechs Seitenflächen eines Würfels sollen so mit verschiedenen positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass zwei Zahlen genau dann teilerfremd sind, wenn sie auf gegenüberliegenden Seitenflächen liegen.

a) Finden Sie eine derartige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderte Eigenschaft hat.

b) Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert, welchen die größte der sechs Zahlen einer derartigen Beschriftung annehmen kann.





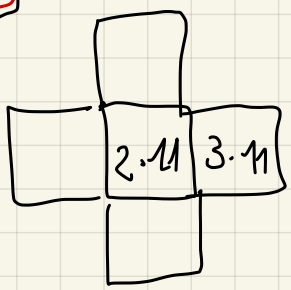


2 3

5 7

$2 \cdot 3 \cdot 5$

$2^2 \cdot 3$



Beh. Jedes Feld hat min 2 Primfaktoren

Bew. Angenommen, ein Feld ist p^k.

Dann besitzt das Feld links den Faktor p,

da sie nicht teilerfremd sind. Ebenso das Feld rechts

↳ links und rechts sind nicht teilerfremd.

Beh. Wenn ein Faktor mehrfach in einem Feld vorkommt, kann man alle bis auf einen weglassen $p^5 \cdot q \cdot r \rightsquigarrow p \cdot q \cdot r$

$2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, ~~$2 \cdot 11$~~, ~~$2 \cdot 13$~~, ~~$2 \cdot 3 \cdot 5$~~, ~~$3 \cdot 11$~~, ~~$2 \cdot 17$~~,

$5 \cdot 7$

$2^2 3$

580931

Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die $(n+14) \cdot n$ eine Quadratzahl ist.

520933

Für je zwei positive rationale Zahlen a, b bezeichnen wir mit $f(a, b)$ die kleinste positive ganze Zahl n, für die $n \cdot a$ und $n \cdot b$ beide ganzzahlig sind. Es seien nun x und y gegebene positive rationale Zahlen. Beweisen Sie:

$$f(x + y, x \cdot y) = f(x, 1) \cdot f(y, 1)\,.$$

611032

a) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ positive ganze Zahlen $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ existieren, für die

$$\frac{31}{61} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \tag{1}$$

gilt.

b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen a derart, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ positive ganze Zahlen $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ existieren mit

$$\frac{a}{61} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}. \tag{2}$$

521033

a) Finden Sie für jede Primzahl p zwei wesentlich verschiedene Darstellungen des Bruches $\frac{p^2-1}{p^2}$ als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche mit gleichem Zähler und verschiedenen Nennern.

b) Beweisen Sie, dass sich nur genau zwei wesentlich verschiedene Darstellungen finden lassen.

Hinweis: Ein *vollständig gekürzter Bruch* ist die eindeutige Darstellung $r = \frac{p}{q}$ der positiven rationalen Zahl r mit positiven teilerfremden ganzen Zahlen p und q. Zwei Summendarstellungen heißen *wesentlich verschieden*, wenn sie nicht durch Vertauschen der Summanden ineinander übergehen.

Nächste Woche starten wir bereits um 19:00 Uhr.

Pell-Gleichungen

Eine Pell-Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

wobei $d \in \mathbb{Z}_+$ eine vorgegebene Zahl ist.

Üblicherweise fragt man nach allen ganzzahligen (positiven) Lösungen (x, y) einer Pell-Gleichung.

Für welche d kannst du alle Lösungen von $x^2 - dy^2 = 1$ schnell bestimmen? Für alle Quadratzahlen d.

Zum Beispiel $x^2 - 4y^2 = 1$

$$\underbrace{(x + 2y)}_{\geq 0}(x - 2y) = 1 \rightsquigarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad x = 1,\ y = 0$$

Was ist mit Pell-Gleichungen $x^2 - dy^2 = 1$, wo d keine Quadratzahl ist?

Beispiel: Wie viele positiven ganzen (x,y) erfüllen die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$?

$(x_1, y_1) = (3,2)$ $(1,0)$

$x_1^2 - 2y_1^2 = 1$

$(x_1 - y_1\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) = 1$ $\quad 1 \cdot 1 = 1$

$(x_1 - y_1\sqrt{2})^2 (x_1 + y_1\sqrt{2})^2 = 1$

$(x_1^2 - 2x_1y_1\sqrt{2} + 2y_1^2)(x_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{2} + 2y_1^2) = 1$

$\underbrace{(x_1^2 + 2y_1^2)}_{x_2} - \underbrace{2x_1y_1\sqrt{2}}_{y_2}\Big)\Big((x_1^2 + 2y_1^2) + 2x_1y_1\sqrt{2}\Big) = 1$

$(x_1^2 + 2y_1^2)^2 - 2^2 x_1^2 y_1^2 \cdot 2 = 1$

$x_2^2 - y_2^2 \cdot 2 = 1$

$x_2 = 17$

$y_2 = 12$

$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$

$x_1^2 - 2y_1^2 = 1$ $\quad (x_1, y_1) = (3,2)$

$(x_1 + y_1\sqrt{2})(x_1 - y_1\sqrt{2}) = 1$

$(x_1 + y_1\sqrt{2})^3 (x_1 - y_1\sqrt{2})^3 = 1$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(x_1^3 + 3x_1^2 y_1\sqrt{2} + 3x_1 y_1^2 \cdot 2 + y_1^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2})(x_1^3 - 3x_1^2 y_1\sqrt{2} + 3x_1y_1^2 \cdot 2 - y_1^3 \cdot 2\sqrt{2}) = 1$

$\Big(\underbrace{(x_1^3 + 3x_1y_1^2 \cdot 2)}_{x_3} + \underbrace{(3x_1^2y_1 \cdot 2 + y_1^3 \cdot 2)}_{y_3}\sqrt{2}\Big)\Big((x_1^3 + 3x_1y_1^2 \cdot 2) - (3x_1^2y_1 \cdot 2 + y_1^3 \cdot 2)\sqrt{2}\Big) = 1$

27 $\quad$ 72 $\quad$ 54 $\quad$ 16

$x_3 = 99$

$y_3 = 70$

$x_3^2 - 2y_3^2 = 1$

Wie viele positiven ganzen (x,y) erfüllen die Gleichung

$x^2 - 3y^2 = -1$? Keine, da $x^2 \equiv -1 \mod 3$ keine Lösung

Wie viele positiven ganzen (x,y) erfüllen die Gleichung

$\boxed{x^2 - 5y^2 = 4}$?

$x^2 - 5y^2 = 1$

$x_1'^2 - 5y_1'^2 = 1$

$(x_1' - y_1'\sqrt{5})(x_1' + y_1'\sqrt{5}) = 1$

$(x_1' - y_1'\sqrt{5})^2 \quad (x_1' + y'\sqrt{5})^2 = 1$

$\underbrace{(x_1 - y_1\sqrt{5})(x_1' - y_1'\sqrt{5})^2}_{x_2 + y_2\sqrt{5}}, \quad \underbrace{(x_1 + y_1\sqrt{5})(x_1' + y_1'\sqrt{5})^2}_{x_2 - y_2\sqrt{5}} = 4$

$(x_1, y_1) = (3,-1)$

$(x_1', y_1') = (9,4)$

Satz: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{q^2 : q \in \mathbb{N}\}$. Dann besitzt die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen (x, y).

Ist (x_1, y_1) die Lösung mit dem kleinsten x-Wert, so sind alle positiven Lösungen (x_n, y_n) gegeben durch

$$x_n + \sqrt{d}\, y_n = (x_1 + \sqrt{d}\, y_1)^n.$$

Satz: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{q^2 : q \in \mathbb{N}\}$ und $a \in \mathbb{Z}$.
Dann besitzt die Gleichung $x^2 - dy^2 = a$ entweder keine oder unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y).

Gibt es unendlich viele Dreieckszahlen, die auch Quadratzahlen sind?

$$\frac{n(n+1)}{2} = q^2 \qquad (\ast)$$

$$\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \tfrac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + n = 2q^2 \quad \Big| +\tfrac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2q^2 + \tfrac{1}{4} \quad \Big| \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \quad (2n+1)^2 = 8q^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (2n+1)^2 - 8q^2 = 1 \qquad p := 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 - 8q^2 = 1$$

Diese Pell-Gleichung hat unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen (p, q).
Bei jeder dieser Lösungen ist p ungerade, da die linke Seite sonst gerade wäre und die rechte ungerade
$\Rightarrow (\ast)$ hat unendlich viele pos. ganze Lsg

Gibt es unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen (x,y) der Gleichung

$$x^2 - 4xy + y^2 = 1\ ?$$

Wie ist es bei der Gleichung

$$x^2 - 4xy + y^2 = 13\ ?$$

$$x^2 - 4xy + y^2 = 13$$

$$\underbrace{(x-2y)}_{p}^2 - 3y^2 = 13$$

$$p^2 - 3y^2 = 13$$

$$(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$p := x - 2y \qquad x = p + 2y$$

↳ Dies hat unendlich viele pos. ganz. Lösungen (p,y),
da $(p,y) = (5,2)$ eine pos. ganz. Lsg ist

$(4,1)$

Gibt es unendlich viele Dreiecke, dessen Seitenlängen drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind und dessen Flächeninhalt ganzzahlig ist? Gib die Seitenlängen eines solchen Dreiecks an, welches nicht entartet ist.

Tipp: Ist s der halbe Umfang vom Dreieck, so ist dessen Flächeninhalt

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Es seien die Seitenlängen $a = z-1$, $b = z$, $c = z+1$ $\rightsquigarrow s = \frac{3}{2}z$

z $\quad$ $z+1$ $\quad$ $z+2$ $\rightsquigarrow s = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2}$

Wir wollen, dass A ganzzahlig ist, wobei

$$A^2 = \frac{3}{2}z\left(\frac{1}{2}z+1\right)\left(\frac{1}{2}z\right)\left(\frac{1}{2}z-1\right)$$

$$A^2 = \frac{3}{4}z^2\left(\frac{1}{4}z^2-1\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{16}\cdot 3z^2(z^2-4)}$$

↑ Das muss eine Quadratzahl sein

$z = 4$

$(3,4,5)$



$$= \frac{z^2}{16} \cdot \underbrace{3(z^2-4)}_{q^2} \quad \rightsquigarrow$$

- $3(z^2-4)$ ist eine Quadratzahl.
- z ist gerade

$$3(z^2-4) = q^2$$

$$3z^2 - q^2 = 12$$

$$q^2 - 3z^2 = -12$$

$$q^2 - 12y^2 = -12$$

$2y = z$

$q = 6 \quad y = 2$ ist eine Lösung

↳ (q,y) hat unendlich viele ganzzahlige positive Lösungen

Gibt es unendlich viele n, sodass n^2+1 ein Teiler von $n!$ ist?

561246

Man zeige, dass unendlich viele positive ganze Zahlen m existieren, für die es m aufeinanderfolgende Quadratzahlen gibt, deren Summe gleich m^3 ist, und gebe eine Lösung mit $m > 1$ an.

621241

Man bestimme alle Paare (m, n) ganzer Zahlen, für die $n \geq m$ gilt und die die Gleichung

$$n^3 + m^3 - nm(n+m) = 2023 \quad (1)$$

erfüllen.

$= 7 \cdot 17 \cdot 17$

Bei $n=m$ ist die linke Seite 0

$n^3 + m^3 = (n+m)(n^2 - mn + m^2)$

$LHS = (n+m)(n^2 - 2mn + m^2) = 2023$

$= (n+m)(n-m)^2 = 2023 = 7 \cdot 17^2$

Kann das negativ sein? Nein

Kann das negativ sein? Nein, weil der zweite Faktor nicht-negativ und der rechte Faktor positiv ist.

$n - m = 17$, $n + m = 7$ $\Rightarrow$ $n = 12$, $m = -5$

$n - m = 1$, $n + m = 2023$ $\Rightarrow$ $n = 1012$, $m = 1011$

Entweder Probe oder Äquivalenzumformungen.

551241

Man bestimme alle Paare reeller Zahlen (a, b), die das Gleichungssystem

$$a^2 + b^2 = 25\,,$$
$$3(a+b) - ab = 15$$

erfüllen.

$3b = 15$ $\rightsquigarrow$ $3(a+b) + 12 = 15$ $\Rightarrow$ $(a+b) = 1$

$3(a+b) = 15 + ab$

$9(a+b)^2 = 15^2 + 30ab + a^2b^2$

$9a^2 + 18ab + 9b^2 = 15^2 + 30ab + a^2b^2$

$18ab + 15^2 = 15^2 + 30ab + a^2b^2$

$0 = 12ab + (ab)^2$ $\rightsquigarrow$ $ab = 0$ $\rightsquigarrow$ $(5,0)$ $(0,5)$

$ab = -12$ $\rightsquigarrow$ $a+b = 1$

I − 2·II $\quad a^2 + b^2 - 6(a+b) + 2ab = -5$

$(a+b)^2 - 6(a+b) = -5$

$(a+b)^2 - 6(a+b) + 5 = 0$ $\rightsquigarrow$ $(a+b) = 5$ oder $= 1$

$3 + \sqrt{9-5}$

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - x - 12$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$

$= 4$ oder -3

$\Rightarrow$ $(4, -3)$ oder $(-3, 4)$

Probe: Alle Lösungen einsetzen.

541241

Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2y &= 10 \ , \\ y^3 + \ xy^2 &= \ 2 \end{aligned}$$

erfüllen.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = (x+3y)^3$$

I + 27 II $\quad (x+3y)^3 = 64 \quad \rightsquigarrow \quad x+3y = 4 \quad \rightsquigarrow \quad x = 4-3y$

$$y^3 + (4-3y)\,y^2 = 2$$

$$y^3 + 4y^2 - 3y^3 = 2$$

$$-2y^3 + 4y^2 - 2 = 0$$

$$y^3 - 2y^2 + 1 = 0 \quad \rightsquigarrow \text{hat NST} \quad y = 1$$

$$(y-1)(y^2 - y - 1) = 0$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(x,y) \in \left\{ (1,1), \left(4 - \frac{3}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(4 - \frac{3}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right\}$$

$\Rightarrow$ Probe!

551244

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m \leq 2n$, die die Gleichung

$$m \cdot \binom{2n}{n} = \binom{m^2}{2}$$

erfüllen.

$$m \cdot \frac{(2n)!}{n!\, n!} = \frac{m^2 (m^2-1)}{2} \qquad \frac{m}{2} \leq n$$

$$\frac{(2n)\cdot \ldots \cdot (n+1)}{n \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(2n)!}{n!\, n!} = 4 \frac{m (m^2-1)}{8} \leq 4 \frac{m^3}{8} \leq 4 \cdot n^3$$

Ind. Annahme $\frac{2n \cdot \ldots \cdot (n+1)}{n \cdot \ldots \cdot 1} > 4 \cdot n^3$

Ind. schluss. Dann gilt das auch für

$$\frac{2n \cdot \ldots \cdot (n+1)}{n \cdot \ldots \cdot 1} \; \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \leq \frac{(2n+2) \cdot \ldots \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot \ldots \cdot 1} \overset{!}{>} 4 (n+1)^3$$

$$\Leftarrow 4n^3 \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} > 4 (n+1)^3$$

$$\Leftarrow n^3 (2n+2)(2n+1) > (n+1)^5$$

$$\Leftarrow 4 n^5 > (n+1)^5$$

$$\Leftarrow 1.32\, n > n+1$$

$$\Leftarrow 0.32 n > 1$$

$$\Leftarrow n > 4$$

$$\sqrt[3]{n} \leq \sqrt{n} \leq n \leq n^2 \leq n^3 \leq \ldots \leq n^{1000000} < 2^n < 2.1^n$$

$\vee\!\!\!\vee$

$\vdots$

$\vee\!\!\!\vee$

$\sqrt[1000]{n}$

$\vee\!\!\!\vee \log n$

Wenn n groß genug ist

541244

Es sei k eine positive ganze Zahl. Ferner sei n_k die Zahl, die im Dezimalsystem durch die Ziffer 7 gefolgt von k Ziffern 0 und einer Ziffer 1 am Ende dargestellt wird. Man beweise folgende Aussagen:

a) Keine der Zahlen n_k ist durch 13 teilbar.

b) Es gibt unendlich viele Zahlen n_k, die durch 17 teilbar sind.

$n_1 = 71$ $\quad n_2 = 7001$ $\quad n_3 = 70001$

$n_k = 7 \cdot 10^k + 1 \mod 13$

k	$7 \cdot 10^k \mod 13$
1	5
2	11
3	6
4	8
5	2
6	7
7	5

$7 \cdot 10^k$ ist nie 12 mod 13

↳ $7 \cdot 10^k + 1$ nie durch 13 teilbar

$n_{k+1} = (n_k - 1) \cdot 10 + 1$

$= 10 n_k - 9$

13
26
39
52
65
78
91
104
117
130

531241

Es sei n eine nichtnegative ganze Zahl.

Man beweise, dass dann

$$5^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^n$$

keine Primzahl ist.

$n=0 \rightsquigarrow 152 = 2 \cdot 76 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$ durch 2 teilbar

$n=1 \rightsquigarrow 3287 = 19 \cdot 173$

$$\begin{aligned} 5^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^n &= 125 \cdot 25^n + 27 \cdot 3^n \cdot 2^n \\ &\leq 125 \cdot 25^n + 27 \cdot 6^n \\ &\equiv 11 \cdot 6^n + 8 \cdot 6^n \mod 19 \\ &= 19 \cdot 6^n \\ &\equiv 0 \mod 19. \end{aligned}$$

$a \equiv b \mod c \qquad 25^n \equiv 6^n$

$\Leftrightarrow a^n \equiv b^n \mod c$

$x^3 - z^3 = 3y - 3x$

$(x-z)(x^2+xz+z^2) = 3(y-x)$

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4, \\ y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4, \\ z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow 3y+2+3z+2 = 3y+3z+4$

erfüllen.

I + III − II

$2x^3 = 6y + 4$

$x^3 = 3y + 2$

$y^3 = 3z + 2$

$z^3 = 3x + 2$

Lösungen: $(2, 2, 2)$

$(-1, -1, -1)$

Probe!

Mach, dass $(0, 0, 0)$ eine Lösung ist.

571241

Man bestimme alle reellen Zahlen x, y, z, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xy + z &= -30\,, \\ yz + x &= 30\,, \\ zx + y &= -18 \end{aligned}$$

erfüllen.

Tipps und Tricks beim Aufschrieb

Sei x eine positive reelle Zahl. Zeige, dass $x + \frac{1}{x} \geq 2$ gilt. Bestimme alle x, für die Gleichheit gilt.

Wie würdest du die Lösung aufschreiben?

Weil Quadrate reeller Zahlen nicht-neg. sind, $(x-1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

Weil x positiv ist, verändert eine Division durch x das Relationszeichen nicht. Daher gilt,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad \text{(da } x \text{ positiv ist)}$$

Da überall Äquivalenzumformungen waren, gilt Gleichheit von $x + \frac{1}{x} \geq 2$ genau dann wenn bei $(x-1)^2 \geq 0$ Gleichheit gilt, also genau bei $x = 1$.

Seien $p, q, r > 0$ reelle Zahlen. Zeige

$$\frac{\sqrt{pq}}{p+q+2r} + \frac{\sqrt{qr}}{q+r+2p} + \frac{\sqrt{pr}}{p+r+2q} \leq \frac{3}{4}.$$

↙ Die gilt, da $p, q > 0$

Wir verwenden AM-GM, also z.B. $\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}$. Also:

$$\Leftarrow \quad \frac{\frac{p+q}{2}}{p+q+2r} + \frac{\frac{q+r}{2}}{q+r+2p} + \frac{\frac{p+r}{2}}{p+r+2q} \leq \frac{3}{4}.$$

$$\Leftarrow \quad \frac{p+q}{p+q+2r} + \frac{q+r}{q+r+2p} + \frac{p+r}{p+r+2q} \leq \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Wenn ich bei $(*)$ p gegen 0 laufen lasse, geht die linke Seite gegen

$$\frac{q}{q+2r} + \frac{q+r}{q+r} + \frac{r}{r+2q} \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{q}{q+2r} + 1 + \frac{r}{r+2q} \leq \frac{3}{2}$$

Bei $q = r = 1$ ist dann die linke Seite

$$\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2}$$

Seien $x, y, z > 0$ reelle Zahlen. Zeige

$$4(x^3+y^3+z^3+3) \geq 3(x+1)(y+1)(z+1)$$

$$\Leftarrow \quad \frac{x^3+y^3+z^3+3}{3} \geq \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{4}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{4} - 1$$

$$\Leftarrow \quad \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \geq \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{4} - 1$$

$$\Leftarrow \quad xyz \geq \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{4} - 1$$

Wenn x gegen 0 läuft, wird die Ungleichung zu

$$0 \geq \frac{(y+1)(z+1)}{4} - 1$$

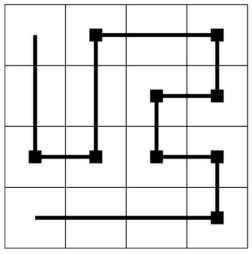
Wenn y und z groß genug sind, gilt die Ungleichung nicht mehr.

$\binom{n}{2}$ ← keine Menge, sondern Zahl

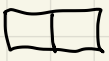
ist die ~~Menge~~ Anzahl der Möglichkeiten aus n Dingen 2 auszuwählen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne zurücklegen

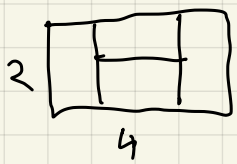
- Denk' an die Probe!
- Beantworte die Frage!
- Zeige „beide Richtungen"!
  1. Gib eine klare Zahl als Antwort
  2. Zeige, dass es eine Schlange mit dieser Zahl an Ecken gibt (Konstruktion)
  3. Zeige, dass es keine bessere Schlange gibt.
- Sind alle Sätze wahr und zwar so, wie sie da stehen?
- Bei Multiplikation/Division: Warum dreht sich das Ungleichzeichen nicht um? Warum dividieren wir nicht durch 0?
- Gebe wichtigen Gleichungen/Zwischenergebnissen Nummern, um später einfach auf sie zu verweisen.
- Bei Geometrie: Mache eine große Skizze!
- Definiere alle Variablen vor ihrer ersten Benutzung!
- Werden alle Voraussetzungen benutzt und dies hervorgehoben?
- Sind Fallunterscheidungen klar strukturiert und vollständig?
- Mache Absätze für neue Ideen
- Sind wichtige Zwischenergebnisse hervorgehoben, z. B. durch Lemma?

Aufgabe T–3

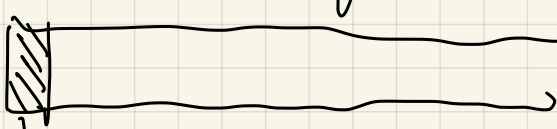


Eine *Schlange* in einem $n \times n$-Quadratgitter ist ein Pfad, der aus Strecken zwischen Mittelpunkten benachbarter Felder zusammengesetzt ist, durch die Mittelpunkte aller n^2 Felder verläuft und jedes Feld genau einmal betritt. Dabei heißen zwei Felder benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Man beachte, dass alle Stücke der Schlange parallel zu Gitterachsen sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel einer Schlange in einem 4×4-Quadratgitter. Diese Schlange hat neun 90°-Winkel, markiert durch kleine schwarze Quadrate.
Man betrachte nun eine Schlange durch die 2025 Felder eines 45×45-Quadratgitters. Was ist die größtmögliche Anzahl an 90°-Winkeln, die eine solche Schlange haben kann?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein (2×2026)-Rechteck mit  und  zu packetieren?



Sei F_n die Anzahl der Paketierungen bei einem $(2 \times n)$-Rechteck
Behauptung: $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Rekursion $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$
Beweis: wir unterscheiden, wie das Feld unten links abgedeckt wird
Fall 1: Durch ein senkrechten Domino



Dann gibt es F_{n-1} Paketierungen für den Rest

Fall 2: Durch ein waagerechten Domino 

Dann ist auch oben links durch ein waagerechtes abgedeckt und es gibt F_{n-2} Möglichkeiten für den Rest.

⋮

$\Rightarrow$ F_n ist die um 1 verschobene Fibonacci-Folge

□

Putnam 1978: Es werden 20 Zahlen aus $\{1, 4, 7, 10, \dots, 100\}$ gewählt. Zeige, dass sich zwei verschiedene Zahlen von ihnen zu 104 addieren.

Alle Zahlen haben die Form $3k+1$ mit $0 \leq k \leq 33$

$(3m+1) + (3n+1) = 104 \iff m+n = 34$

Brauchen wir 20 oder reichen 19? 19 reichen!

Wir gruppieren die Zahlen:

$\{1\}$

$\{52\}$

$\{4, 100\}$

$\{7, 97\}$

$\vdots$

$\{49, 55\}$

16 Paare

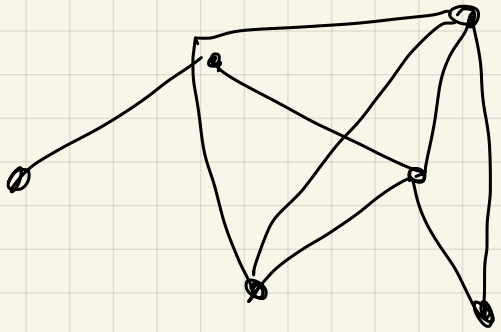
18 Mengen

Wählen wir 20 Zahlen aus, so gilt nach dem Schubfachprinzip, dass aus mindestens einer Menge zwei Zahlen gewählt werden müssen. Diese addieren sich zu 104.

At a party with n people, some greet each other by shaking hands, some don't. Prove that there are two people who shook hands with the same number of people.

Jeder hat zwischen 0 und n-1 Mal die Hände geschüttelt. Damit dieselbe Anzahl nicht zweimal vorkommt, müsste jede Anzahl genau einmal vorkommen. Insbesondere müsste es eine Person geben, die 0 Mal die Hände geschüttelt hat, und eine, die n-1 Mal die Hände geschüttelt hat. Beides kann aber nicht gleichzeitig gelten. Widerspruch!

⇒ Dies zeigt: In jedem einfachen Graphen gibt es zwei Knoten mit demselben Grad



ganze Zahlen

Let $a_1, \ldots, a_n$ be not necessarily distinct integers. Prove that there exists a non-empty subset of these numbers with sum divisible by n. Is the same statement still true if we only have $n-1$ integers?

Betrachte alle Zahlen mod n $\rightsquigarrow$ Alle Zahlen sind in $\{0, \cdots, n-1\}$

Wenn die 0 vorkommt, sind wir fertig.

Ansonsten kommt ein Rest mind. doppelt vor.

$\{1, n-1\}$

$\vdots$

$\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

Wenn man $(n-1)$-Mal die Zahl 1 hat, dann hat jede nicht-leere Teilmenge eine Summe zwischen 1 und $n-1$ $\rightsquigarrow$ nicht durch n teilbar.

$\Rightarrow$ Die Anssage gilt nicht für $n-1$.

Für $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sei $s_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_i$

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Fall 1: $\exists i \in \{1, \cdots, n\}$, $s_i \equiv 0 \mod n$ $\rightsquigarrow$ wir sind fertig

Fall 2: Für kein i gilt $s_i \not\equiv 0 \mod n$

Dann hat man $n-1$ mögliche Restklassen und n Zahlen s_i.

STP

$\Rightarrow \exists i < j$, $s_i \equiv s_j \mod n$

$\Rightarrow s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j \equiv 0 \mod n$.

Prior to the World Cup 2026, Harry Kane has practiced shooting penalties. In the last 77 days, he shot at least one penalty each day. In total, he shot at most 132 penalties.

Prove that there is a sequence of successive days on which he shot exactly 21 penalties.

notwendig, da er sonst an einem Tag alle 132 Elfmeter schießen könnte.

Es sei a_i die Anzahl der Elfmeter, die Kane an Tag i geschossen hat

Zu zeigen: $\exists\, i<j$, sodass $a_{i+1} + \cdots + a_j = 21$.

Es sei $s_i = a_1 + \cdots + a_i$

$s_1, \ldots, s_{77}$

Zu zeigen: $\exists\, i<j$, sodass $s_j - s_i = 21$ bzw. $s_j = s_i + 21$.

$s_1 + 21, \ldots, s_{77} + 21$

Alle s_i, $s_i + 21$ haben werte zwischen 1 und $132 + 21 = 153$

Insgesamt haben wir $2 \cdot 77 = 154$ zahlen der Form s_i, $s_i + 21$.

Nach Schubfachprinzip kommt ein Wert doppelt vor.

Außerdem gilt $s_i \neq s_j$, da an jedem Tag ein Elfmeter geschossen wurde. Analog $s_i + 21 \neq s_j + 21$ für $i \neq j$.

$\Rightarrow \exists\, i, j$ mit $s_j = s_i + 21$.

← Freie Universität

The FU has changed its logo. Now, it consists of a square with side length 1 and inside the square there are several circles with a total circumference of 48.

Prove that one can find a line that intersects at least 16 of these circles.

Nächste Woche keine Stunde

0 oder 1 mod 4

Two CD's, one is transparent and the other one is not, are partitioned into 200 equal sized circular sectors. On the first CD the sectors are coloured arbitrarily with blue and yellow. On the second CD some 100 sectors are coloured blue and the other 100 yellow. Show that it is always possible to place the first CD on top of the second such that the sectors align and at least 100 of the sectors look green

Die Sätze von Dilworth und Mirsky

Definition: Wenn M eine Menge ist, dann ist $\preceq$ eine **Relation**, wenn für je zwei Elementen $x, y \in M$ wohldefiniert ist, ob $x \preceq y$ gilt oder nicht. In diesem Fall schreibt man $x \not\preceq y$.

Beispiel: • $<$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$, weil für je zwei natürlichen Zahlen a, b wohldefiniert ist, ob $a < b$ oder $a \not< b$ gilt. Ebenso ist das „teilt"-Symbol $\mid$ eine Relation auf $\mathbb{N}$.

$$7 < 12 \qquad 4 \mid 12$$
$$13 \not< 4 \qquad 5 \nmid 12$$

Definition: Ist P eine Menge und $\preceq$ eine Relation auf P, so ist P eine **partiell geordnete Menge** oder auch **Poset**, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- für alle $a \in P$ gilt $a \preceq a$ (**reflexiv**)
- für alle $a, b \in P$ gilt, wenn $a \preceq b$ und $b \preceq a$, dann gilt $a = b$ (**anti-symmetrisch**)
- für alle $a, b, c \in P$ gilt, wenn $a \preceq b$ und $b \preceq c$, dann gilt auch $a \preceq c$ (**transitiv**)

Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Poset.

$$a \leq a \qquad a \leq b \quad b \leq a \Rightarrow a = b$$
$$a \leq b \quad b \leq c \quad a \leq c$$

Definition: Ist P eine Menge und $\preceq$ eine Relation auf P, so ist P eine partiell geordnete Menge oder auch Poset, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- für alle $a \in P$ gilt $a \preceq a$ (reflexiv)
- für alle $a, b \in P$ gilt, wenn $a \preceq b$ und $b \preceq a$, dann gilt $a = b$ (anti-symmetrisch)
- für alle $a, b, c \in P$ gilt, wenn $a \preceq b$ und $b \preceq c$, dann gilt auch $a \preceq c$ (transitiv)

Aufgabe: Welche dieser Relationen ist eine Poset?

a) $(\mathbb{Z}, \leq)$ ✓

b) $(\mathbb{N}, <)$ Nein, da nicht reflexiv

c) (Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\subseteq$) „ist Teilmenge von" ✓

d) (Menge aller Dreiecke in der Ebene, Nein, denn nicht anti-symmetrisch
$D_1 \preceq D_2 \Leftrightarrow$ Flächeninhalt von $D_1 \leq$ Flächeninhalt von D_2)

e) $(\mathbb{N}, |)$ „teilt" ✓ $(\mathbb{Z}, |)$ nicht anti-symm.

f) $(\mathbb{N}, a \preceq b \Leftrightarrow a \equiv b \bmod 42)$ nicht anti-symm.

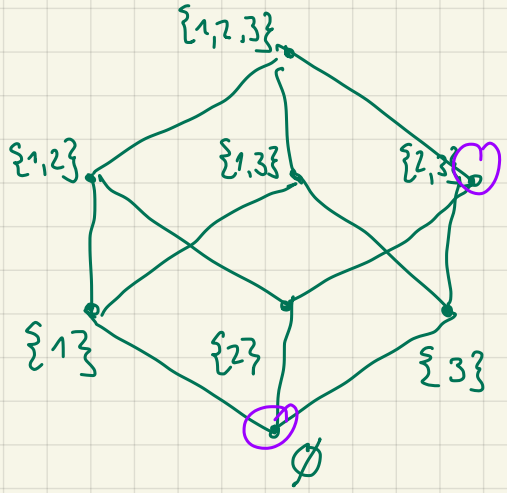
g) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c + d)$
nicht anti-symm

Posets $(P, \preceq)$ werden gerne durch Hasse-Diagramme dargestellt. Dabei werden alle Elemente von P als Punkte dargestellt. Wenn $a \preceq b$ gilt und es kein c gibt, für das $a \preceq c \preceq b$ gilt, dann wird b oberhalb von a gemalt und a und b durch eine Kante verbunden

Beispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$



(Teilmengen von $\{1,2,3\}$, $\subseteq$)



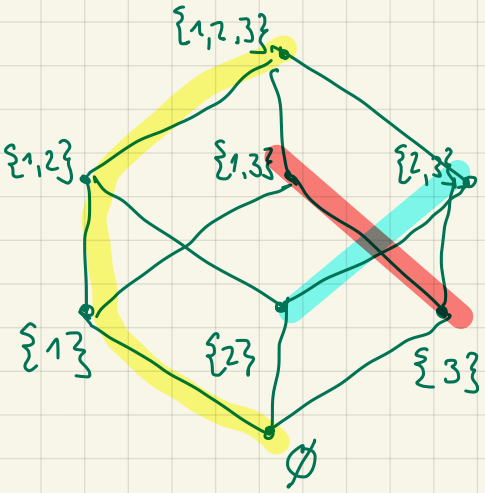
Sei $(P, \preceq)$ eine Poset. Eine **Kette** ist eine Folge $a_1, a_2, \dots$ von paarweise verschiedenen Elementen von P, sodass

$a_1 \preceq a_2 \preceq a_3 \preceq \dots$ gilt.

Eine **Antikette** ist eine Teilmenge A von P, sodass für alle $a \neq b \in A$ gilt $a \not\preceq b$ und $b \not\preceq a$.

Wie lang ist die längste Kette in $(\{1,2,3\}, \subseteq)$? 4

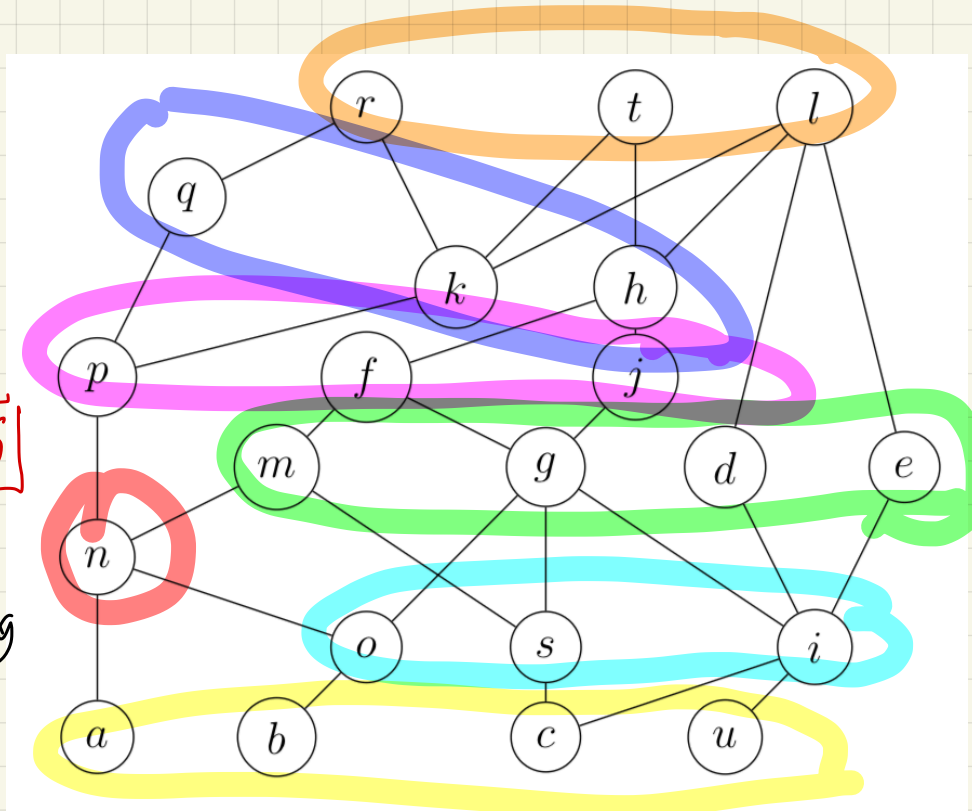
Wie groß ist die größte Antikette? 3



Wie viele Ketten brauchst du um $(\{1,2,3\}, \subseteq)$ in Ketten zu zerlegen? 3

Wie viele Antiketten brauchst du um $(\{1,2,3\}, \subseteq)$ in Antiketten zu zerlegen? 4

Wie ist es hier:



Längste Kette: 7

Größte Antikette: 6

Kleinste Kettenzerlegung: 6

Kleinste Antikettenzerlegung: 7

Satz von Mirsky: Sei $(P, \geq)$ eine Poset. Die Länge der längsten Kette von P ist gleich der kleinsten Anzahl von Antiketten in einer Antikettenzerlegung von P.

Satz von Dilworth: Sei $(P, \geq)$ eine Poset. Die Größe der größten Antikette von P ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten in einer Kettenzerlegung von P.

$\{1, 2, \dots, 1000\}$

Fabien has 1501 rectangular pieces of paper of pairwise distinct shapes whose side lengths all lie in the set [1000]. Show that he can find four pieces of paper A, B, C, and D such that A fits into B, B fits into C, and C fits into D. Would the same be true if Fabien just had 1500 pieces of paper?

$A_i = (a, b)$ $B_i = (c, d)$ A passt in B $\Leftrightarrow$ $(a \leq c$ und $b \leq d)$ oder $(a \leq d$ und $b \leq c)$ gilt

$R \leq R$ ✓

$R_1 \leq R_2$ $R_2 \leq R_1$ $\Rightarrow$ $R_1 = R_2$ ✓

$R_1 \leq R_2$ $R_2 \leq R_3$ $\Rightarrow$ $R_1 \leq R_3$ ✓

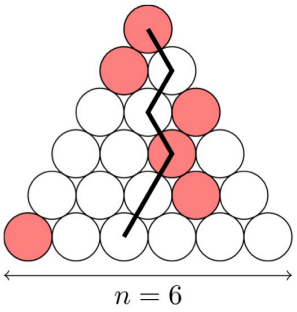
} Wir haben eine Poset!

Zu zeigen: Wir haben eine Kette der Länge 4.
Dazu reicht es zu zeigen, dass wir keine Antikettenzerlegung in 3 Antiketten haben. (Dann gilt nach Mirsky, dass wir eine Kette der Länge 4 haben:)

Angenommen, es gäbe eine Antikettenzerlegung in 3 Antiketten.
Dann hat eine Antikette die Größe $\lceil \frac{1501}{3} \rceil = 501$ nach Schubfach
Dann haben 2 Rechtecke in dieser Antikette eine Seitenlänge gemeinsam → Eins passt ins andere ↯

Let n be a positive integer. For the World Cup 2026, one sponsor designed the following game: $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ footballs are arranged in an equilateral triangle. In each of the n rows, exactly one football is coloured red. A *Champion's path* is a sequence of footballs obtained by starting in the top row, then repeatedly going from one football to one of the two footballs immediately below it and finishing in the bottom row. The task of the player is to find the Champion's path with the largest number of red footballs.

In the following picture, you can see an example with $n = 6$, along with a Champion's path that contains two red footballs:



Prove that if $n = 2^k$, then there always is a Champion's path containing $k + 1$ red footballs.

Mathe-SH Wettbewerbstraining

Oberstufe

Bitte unter mathe-sh.de → Weiteres → Mitmachen anmelden

How many different anagrams can be formed by permuting the letters of the word

(i) MANAMANA?

(ii) FOOTBALLER if the resulting string must neither contain FOO nor BAR as substring?

(i) $\binom{8}{4}\binom{4}{2}$ ← Wähle 2 Positionen für die N's

↖ Wähle 4 Positionen für die A's

(ii) $X :=$ die Menge der Anagramme von FOOTBALLER

$X_1 :=$ die Menge der Anagramme, die FOO enthält

$X_2 :=$ — " — die BAR enthält

Zu zählen: $X \setminus (X_1 \cup X_2)$

Nach Inklusion-Exklusion:

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2)| = |X| - |X_1| - |X_2| + |X_1 \cap X_2|$$

$|X| = \frac{10!}{2!\,2!}$

$|X_1| = 8 \cdot \frac{7!}{2!} = \frac{8!}{2!}$ ← Mögliche Positionen für FOO

$|X_2| = \frac{8!}{2!\,2!}$

$|X_1 \cap X_2| = \frac{6!}{2!}$

FOO T

BAR L L E

907200

877320

How many six digit numbers have strictly decreasing digits, like 974210?

Was, wenn wir stattdessen wollen, dass die Ziffern streng monoton

steigen?

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9

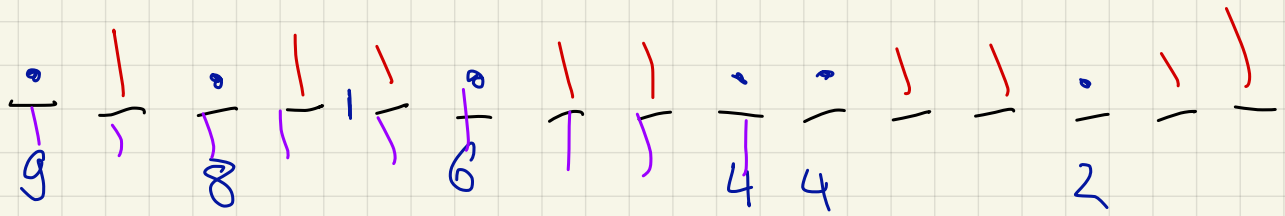
(i) $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$

(ii) $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$

Was, wenn wir nur monoton fallen wollen? 9 8 8 > 6 6

$\binom{15}{6} - 1$ 6 Positionen

9 Trennstriche

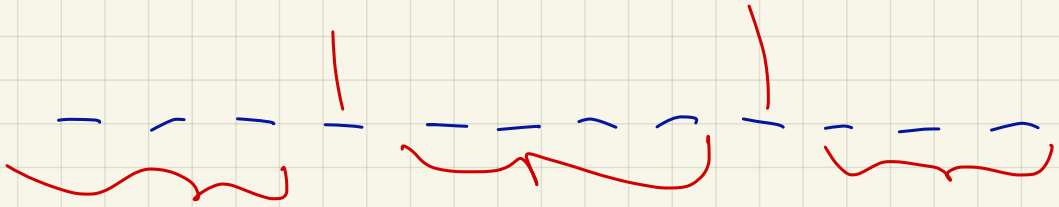


9 8 6 4 4 2

10 Flaschen

3 sorten

↳ 2 Trennstriche



3 Flaschen von Sorte 1

4 Flaschen von Sorte 2

3 Flaschen von Sorte 3

7 0 3



How many positive divisors does the number 735 000 have?

What is the number of positive integers smaller than one million that contain two consecutive digits which are the same?

Suppose you have a 1×8-rectangle whose squares are alternatingly coloured white and black. Furthermore, you have two rooks (♖), two knights (♘), two bishops (♗), a queen (♕), and a king (♔). Your job is to put these eight pieces on the eight squares such that the following three conditions are all satisfied:

- Each square contains exactly one piece
- The king is (not necessarily immediately) between the two rooks
- The two bishops are on two squares of distinct colour

For example, the following placement satisfies all conditions:



How many ways are there to do that?[4]

$2 \cdot (6 + 10 + 12) = 56 = \binom{8}{3}$

← Türme und König

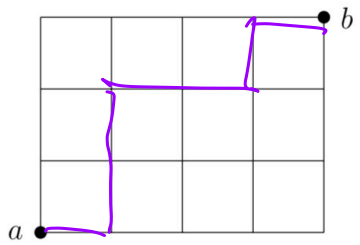
$4 \cdot 4 \cdot \binom{6}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 960$

← Dame

← Läufer auf schwarz

← Läufer auf weiß

Consider the 3×4 grid with points a in the lower left and b in the upper right corner shown below.



7 Schritte, 4 →, 3 ↑

$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

↳ $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten

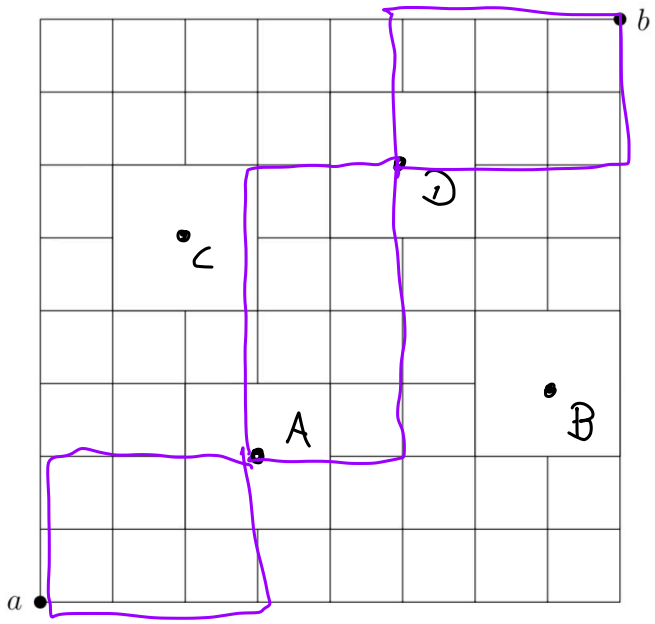
(i) Compute the number of a-b-paths on the grid with movement limited to ↑ or →.

(ii) What is the answer in a 2025×2026 grid?

→ ↑ ↑ → → ↑ →

$\binom{2025+2026}{2025}$

Consider the grid with four holes and points a in the lower left and b in the upper right corner shown below.



Compute the number of a-b-paths on the grid with movement limited to ↑ or →.

X = Menge der a-b-Wege $\quad |X| = \binom{5}{2} \cdot \binom{11}{5}$

X_A = Menge der Wege durch A $\quad |X_A \cap X_D| = \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2}$

X_B = . . .

X_C = . . .

X_D = . . .

Zu zählen: $X \setminus (X_A \cup X_B \cup X_C \cup X_D)$

Nach Inklusion-Exklusion:

$$|X \setminus (X_A \cup X_B \cup X_C \cup X_D)|$$

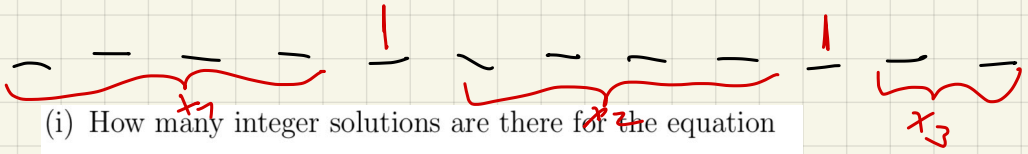
$$= |X| - |X_A| - |X_B| - |X_C| - |X_D|$$

$$+ |X_A \cap X_B| + |X_A \cap X_C| \cdots + |X_C \cap X_D|$$

$$- |X_A \cap X_B \cap X_C| - \cdots - |X_B \cap X_C \cap X_D|$$

$$+ |X_A \cap X_B \cap X_C \cap X_D|$$

$n = 10$



(i) How many integer solutions are there for the equation

$$x_1 + x_2 + x_3 = n$$

with $x_i \geq 0$ for all $i \in [3]$?

$\binom{n+2}{2}$

(ii) Was, wenn x_1, x_2, x_3 positiv sein sollen?

$x_1' = x_1 - 1$
$x_2' = x_2 - 1$
$x_3' = x_3 - 1$
$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$x_1 + x_2 + x_3 = n \iff x_1' + x_2' + x_3' = n - 3$

$\hookrightarrow \binom{n-3+2}{2}$

Let n be a positive integer. A frog sits on the number line at the number 0. He repeatedly draws a number k between 1 and n uniformly at random and independently from the previous rounds and jumps k to the right.

Prove that the probability that he eventually lands on the number n is $\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$.

Sei i eine Zahl zwischen 1 und n. Was ist die Wahrscheinl., dass er nach genau i Sprüngen auf n ist? $\binom{n-1}{i-1} / n^i$

n^i mögliche Sprünge

Wieviele Lsg hat $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = n$ mit $x_i \in \mathbb{Z}_{>0}$? $\binom{n-1}{i-1}$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{i-1}}{n^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^{n-i}\binom{n-1}{i-1}}{n^n}$$

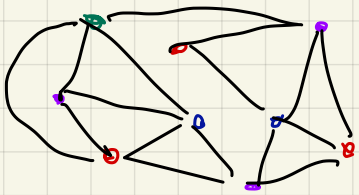
$$(n+1)^{n-1} = n^{n-1} \cdot \binom{n-1}{n-1} + n^{n-2} \cdot 1 \cdot \binom{n-1}{n-2} + \cdots + n^0 \cdot 1^{n-1} \binom{n-1}{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} n^i \cdot 1^{(n-1)-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} n^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} n^{n-1-(i-1)} \cdot \binom{n-1}{i-1} = \sum_{i=1}^{n} n^{n-i} \binom{n-1}{i-1}$$

Greedy Algorithmen

Definition: Sei G ein Graph. Eine Färbung der Knoten von G ist echt, wenn bei keiner Kante beide Endknoten dieselbe Farbe bekommen.

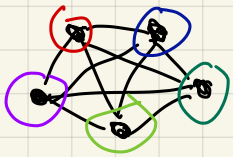


Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die kleinste Zahl k, sodass es eine echte Knotenfärbung mit k Farben gibt.

Beispiel: 1)

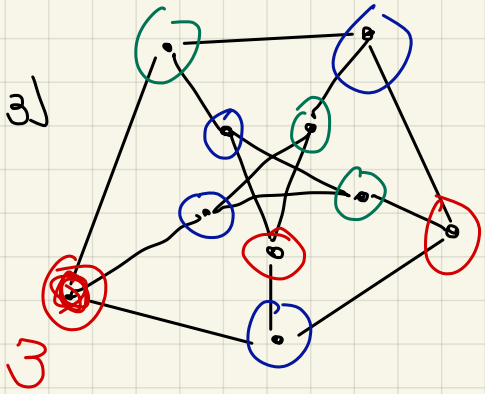


2)



K_5

3)



3

Sei G ein Graph mit Maximalgrad $\Delta(G)$. Zeige, dass

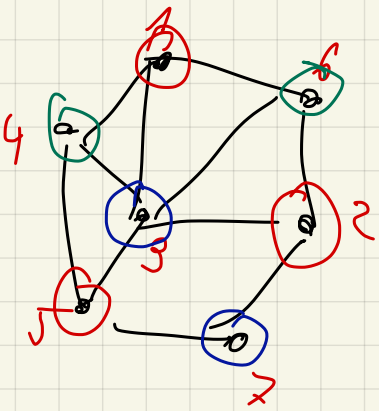
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Zu zeigen: $\exists$ echte Färbung von G mit $\Delta(G)+1$ vielen Farben.

Idee: Gehe durch die Knoten in irgendeiner Reihenfolge und färbe sie einen nach dem anderen ein. Gib den Farben eine Reihenfolge



und färbe den nächsten Knoten immer mit der frühestmöglichen Farbe ein.

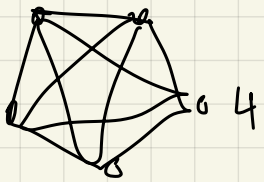


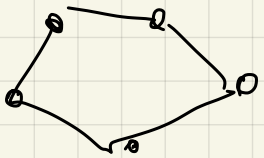
Bei jedem Knoten sind höchstens $\Delta(G)$ viele Farben blockiert, also reichen $\Delta(G)+1$ viele Farben immer.

Gibt es Graphen mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?

Alle vollständige Graphen.

Alle ungerade Kreise.





Satz von Brooks. Wenn $G \neq$ vollständiger Graph

$\neq$ ungerader Kreis

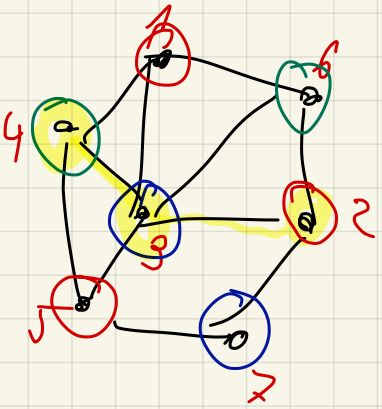
und zusammenhängend, dann $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Sei G ein Graph. Zeige, dass G einen Weg der Länge $\chi(G)-1$ enthält.

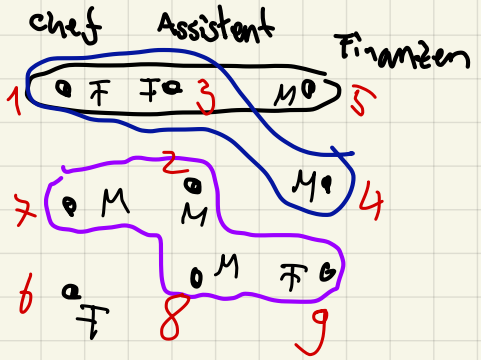


↖ Länge 2.

Sei G mit dem Greedy Algorithmus gefärbt.
Der Algorithmus benutzt min. $\chi(G)$ viele Farben.
Starte bei einem Knoten mit der 'höchsten' Farbe
Der Algo hat nicht die Farbe davor genommen, weil sie blockiert war. Also hat ein Nachbar diese Farbe. Gehe zu diesem Nachbarn und wiederhole.



Eine Firma hat 100 unterschiedliche Stellen zu besetzen. Jede Stelle muss an unterschiedlichen Meetings teilnehmen. Von den Meetings ist nur bekannt, dass sich zwei Meetings nie in genau einer Person überschneiden. Zeige, dass es möglich ist, die 100 Stellen mit Männern und Frauen zu besetzen, sodass in keinem Meeting nur Männer oder nur Frauen sitzen.



Besetze die Stellen nach einem Greedy-Algor. Gib den Stellen eine Ordnung. Gehe die Stellen durch und besetze die Stelle mit Männern oder Frauen beliebig es sei denn dann säße in einem Meeting nur Männer oder nur Frauen.
Die einzige Möglichkeit wie wir nicht mehr weiter machen könnten, wäre wenn man bei einer Stelle x keinen Mann nehmen kann, weil dann ein Meeting M_1 nur Männer hätte, und keine Frau, weil dann ein Meeting M_2 nur Frauen hätte. Aber dann überschneiden sich M_1 und M_2 nur in einer Stelle x. Widerspruch!

1001

999 · 1 g

2. Auswahlklausur 2019/2020 (4. Dezember 2019)

Aufgabe 1. Ein Pirat möchte einen Schatz, bestehend aus 1000 Goldmünzen, die jeweils mindestens 1 g und zusammen genau 2 kg wiegen, in zwei Teile aufteilen, die in ihrer Masse jeweils um höchstens 1 g von 1 kg abweichen. Beweisen Sie, dass dies möglich ist.

Algorithmus: Ordne die Münzen der Größe nach $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{1000}$
Gehe die Münzen von a_1 bis a_{1000} durch und lege sie in Haufen 1, es sei denn dann wäre das Gewicht von Haufen 1 > 1001 g. In dem Fall lege die Münze zu Haufen 2.

Wir wissen: Haufen 1 hat <u>garantiert</u> ein Gewicht $\leq$ 1001 g.
Zu zeigen: Am Ende hat Haufen 1 ein Gewicht $\geq$ 999 g.
Angenommen Münze a_k wird nicht zu Haufen 1 gelegt, macht aber das Gewicht von Haufen 2 größer als 1001 g.
Dann ist Gewicht Haufen 1 + a_k > 1001 g
Gewicht Haufen 2 + a_k > 1001 g

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + 2a_k > 2002\,g$$
$$\Leftrightarrow \quad 2000\,g - a_{k+1} - a_{k+2} - \dots - a_{1000} + a_k > 2002\,g$$
$$\Leftrightarrow \quad a_k > 2g + a_{k+1} + \dots + a_{1000}$$
$$\geq 2g + 1 + \dots + 1$$
$$= 2g + (1000 - k) = 1002 - k$$

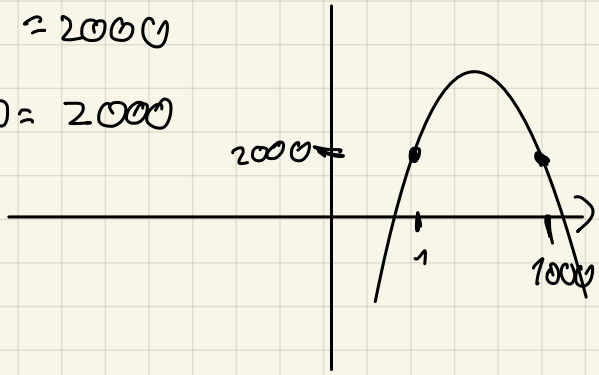
Gesamtgewicht $a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{1000}$
$$\geq k \cdot a_k + 1 + \dots + 1$$
$$> k \cdot (1002 - k) + 1000 - k =: f(k)$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $f(k) \geq 2000$ für alle $k \in [1, 1000]$

Wegen $f(1) = 1001 + 1000 - 1 = 2000$

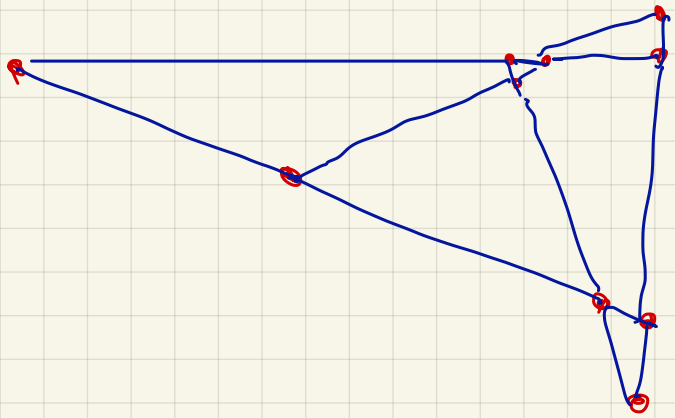
$f(1000) = 1000 \cdot 2 + 1000 - 1000 = 2000$

ist das der Fall und wir sind fertig!



Gegeben seien eine endliche Menge an Geraden in der Ebene. Sei G der Graph, dessen Knoten die Schnittpunkte der Geraden sind und wo zwei Schnittpunkte durch eine Kante verbunden sind, wenn sie auf einer Gerade benachbart sind.

Zeige $\chi(G) \leq 3$.



A set $\{x, y, z\} \subseteq \mathbb{Z}_+$ with $x < y < z$ is called *Berlinish* if $\{z - y, y - x\} = \{1945, 1989\}$. Show that the set of positive integers can be written as a disjoint union of Berlinish sets.

$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

561234

Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl n, die durch 100 teilbar ist und (einschließlich der Zahlen 1 und n) genau 100 Teiler besitzt.

$2^{24} \cdot 5^3$

Es sei n die kleinste natürliche Zahl, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

Da $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ die Bedingungen erfüllt, ist $n \leq 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 = 2000 \cdot 3^4 = 162\,000$

Sei $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$ die Primfaktorzerlegung von n.

Dann ist die Anzahl der Teiler von n genau $(k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_l+1)$

$\Rightarrow (k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_l+1) = 100 = 2^2 \cdot 5^2$

Da n durch 100 teilbar ist, enthält die PFZ von n $2^2 \cdot 5^2$

Da 100 nur vier Primfaktoren hat, ist $l \leq 4$

Da n kleinstmöglich sein soll, hat n höchstens die Primfaktoren $2, 3, 5, 7$

$n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot 7^{k_4}$ mit $k_1 \geq 2$, $k_3 \geq 2$. k_2 und k_4 können 0 sein

Da k_1+1 ein Teiler von 100 ist, ist $k_1 \in \{3, 4, 9, 19, 24, \ldots\}$

Da $2^{19} > 500000$, ist $k_1 \in \{3, 4, 9\}$.

Da n kleinstmöglich, ist $k_1 \geq \max(k_1, k_2, k_3, k_4)$ und da ein Exponent mindestens 4 ist, ist $k_1 \geq 4$. $k_1 \in \{4, 9\}$

Fall 1: $k_1 = 9$. Dann ist $(k_2+1)(k_3+1)(k_4+1) \leq 10$ und $k_3 \geq 2$

$\Rightarrow k_3 \geq 4$ $n = 2^9 \cdot 5^4 \cdot 3^{\wedge}$ zu groß

Fall 2: $k_1 = 4 \rightarrow n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7$

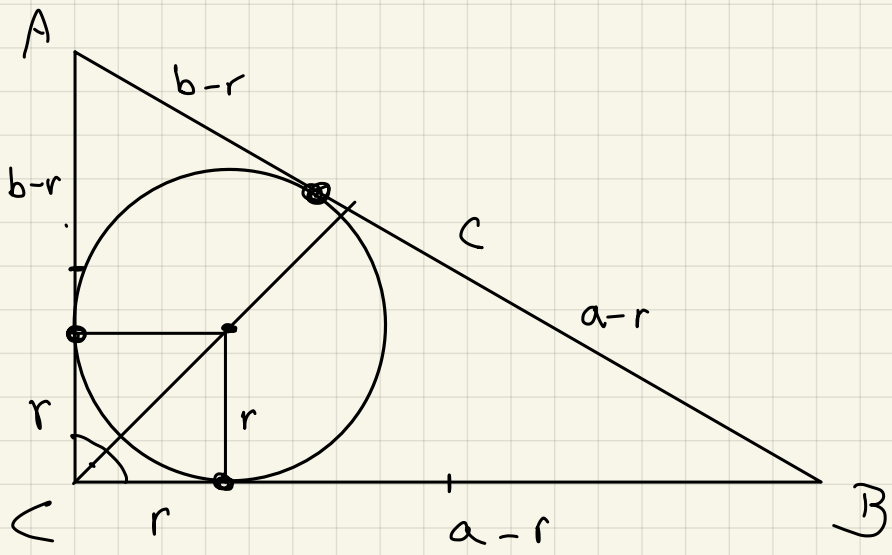
$n = 2^4 \; 3^4 \cdot 5^3$

In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichne r den Inkreisradius, s_a und s_b seien die Längen der Seitenhalbierenden der Katheten a und b.

Man beweise, dass dann stets die Ungleichung

$$\frac{r^2}{s_a^2 + s_b^2} \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$$

gilt.



$$s_a^2 = b^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$s_b^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$\Rightarrow s_a^2 + s_b^2 = \tfrac{5}{4}(a^2+b^2) = \tfrac{5}{4}c^2$$

zu zeigen: $4r^2 \leq (3-2\sqrt{2})c^2$

$$4r^2 \leq (\sqrt{2}-1)^2 c^2$$

zu zeigen: $2r \leq (\sqrt{2}-1)c$

zu zeigen $a+b-c \leq (\sqrt{2}-1)c$

zu zeigen $a+b \leq \sqrt{2}c$

$$a + \sqrt{c^2-a^2}$$

$$\Rightarrow \quad c = a+b-2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

zu zeigen: $a^2+2ab+b^2 \leq 2c^2 = 2(a^2+b^2)$

zu zeigen: $0 \leq a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$ □

$\sin(\alpha \pm \beta) =$

$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

561236

Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1),$$
$$y \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$$

erfüllen.

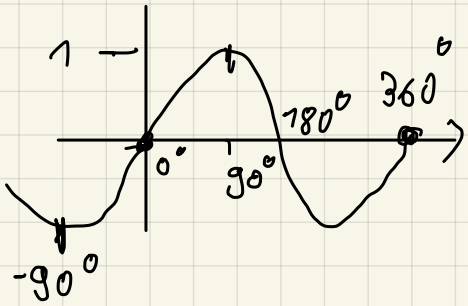
x und y sind zwischen 0 und 1

Trigonometrischer Pythagoras: $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$

$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin(\alpha)^2}$

$\Rightarrow \exists$ eindeutige $\alpha, \beta \in [0°, 90°]$, sodass

$x = \sin(\alpha)$, $y = \sin(\beta)$



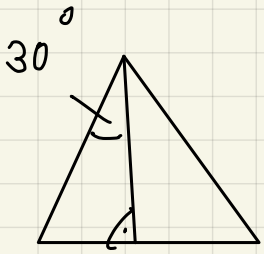
$\Rightarrow \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$

$\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$

$\alpha - \beta \in [-90°, 90°]$

$\Rightarrow \alpha - \beta = 30°$



$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \alpha+\beta \in [0, 180°]$

$\Rightarrow \alpha+\beta = 60°$ und $\alpha+\beta = 120°$

PROBE!

Fall 1: $2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$, $\beta = 15°$

Fall 2: $2\alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 75°$, $\beta = 45°$

$(x, y) \in \{(\sin(45°), \sin(15°)), (\sin(75°), \sin(45°))\}$

551146

Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_6x_7x_1 + x_7x_1x_2$$

für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_7$ mit Summe 1. Man zeige, dass $f(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ einen maximalen Wert annimmt, und bestimme diesen.

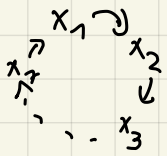
Die Funktion ist stetig und der Definitionsbereich ist abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ kompakt $\Rightarrow$ Maximum wird erreicht.

Vermutung: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_1, \cdots, x_7) = \frac{1}{27}$ ist Maximum

$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$.

$x_1, \cdots, x_7 \in [0, 1]$

Die Funktion ist zyklisch



Können wir beweisen, dass f nur dann maximal sein kann, wenn eine Variable 0 ist?

Beh.: Wenn x_1 und x_5 beide positiv sind, dann gibt auch eine min. so große Lösung, wo x_1 oder x_5 0 ist.

$$f(x_1, \cdots, x_7) > x_1(x_2x_3 + x_6x_7 + x_7x_2) + x_5(x_3x_4 + x_4x_6 + x_6x_7) + x_2x_3x_4$$

O. B. d. A $x_1 = 0$

$$\Rightarrow f(0, x_2, \cdots, x_7) = x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_7$$

O. B. d. A $x_2 = 0$

$$\Rightarrow f(0, 0, x_3, \cdots, x_7) = x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_7$$

$x_2 \leftrightarrow x_7$
$x_3 \leftrightarrow x_6$
$x_4 \leftrightarrow x_5$

$\Rightarrow$ ⋮

$$\Rightarrow f(0, 0, 0, 0, x_5, x_6, x_7) = x_5x_6x_7 \leq \left(\frac{x_5 + x_6 + x_7}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

USA-Olympiade 1980: Seien $0 \le a,b,c \le 1$. Zeige

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1$$

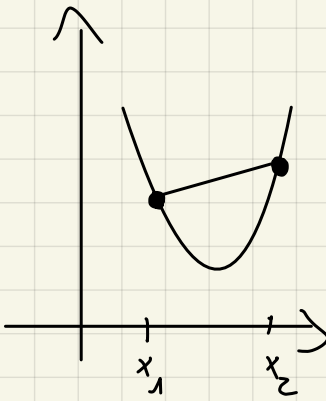
$a\ (1-a)$

Gleicheit bei $a=1,\ b=c=0 \rightsquigarrow \frac{1}{1}+0+0+0=1$

$a=b=c=1 \rightsquigarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=1$

$a=b=1,\ c=0 \rightsquigarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0=1$

$a=b=c=0 \rightsquigarrow 0+0+0+1=1$



LHS scheint maximal zu sein, wenn $a,b,c \in \{0,1\}$

Welche Funktionen sind am Rand maximal

- Quadratische Funktionen mit pos. Koeff. vor x^2
- Polynome vom geraden Grad mit pos. Koeff vor x^{grad}

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf dem Interval $[a,b]$ konkav / konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ die Strecke von $(x_1, f(x_1))$ nach $(x_2, f(x_2))$ unterhalb / oberhalb von dem Graphen liegen

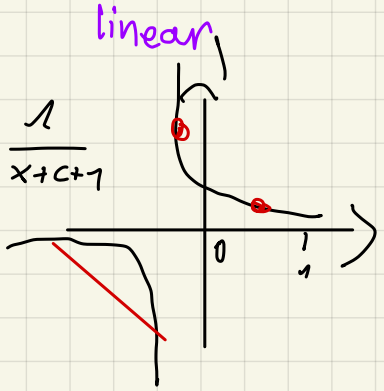
Wenn f'' existiert, dann ist f konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

Konvexe Funktionen nehmen ihr Maximum an den Rändern

an

$$f(x) = \underbrace{\frac{x}{b+c+1}}_{\text{linear in } x \text{ also konvex}} + \underbrace{\frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1}}_{\text{konvex auf } [0,1]} + \underbrace{(1-x)(1-b)(1-c)}_{\text{linear}}$$

$g(x) = \frac{1}{x+c+1}$



$\Rightarrow f(x)$ konvex auf $[0,1]$

$\Rightarrow f(a) \le \max(f(0), f(1))$

$$LHS \leq \max\Big(\underbrace{\frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c)}_{f'(b)}, \underbrace{\frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{b+2}}_{f''(b)} \Big)$$

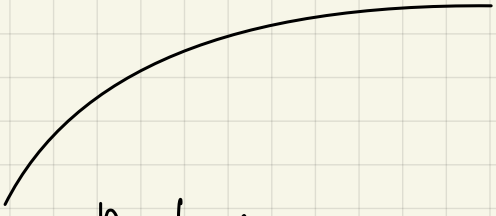
↳ konvex auf $[0,1]$

Jensen Ungleichung: sei f eine konkave (konvexe) Funktion auf $[a,b]$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

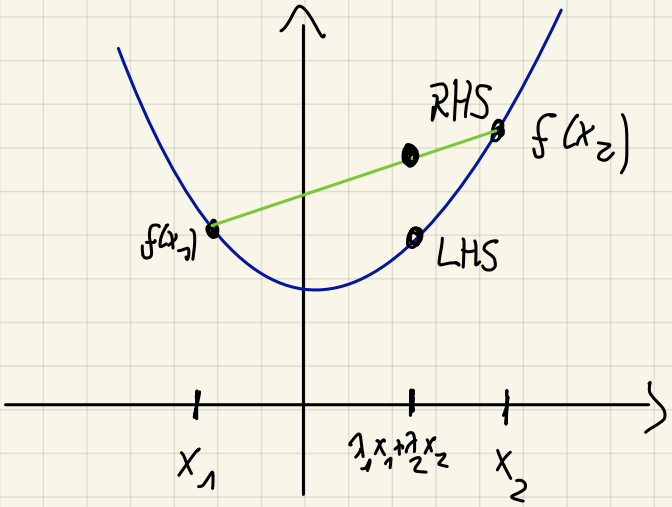
Dann gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

„Die Funktion vom Durchschnitt ist ≤ der Durchschnitt von der Funktion"



Konkav



Gleichheit gilt: • wenn f linear ist auf $[a,b]$ oder

• wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

„Alles ist Jensen" $\quad AM \geq GM$

Zeige, dass für alle $a, b, c > 0$ gilt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Die Ungleichung ist homogen, d.h. $(a, b, c) \mapsto (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$$\text{LHS} \rightsquigarrow \frac{\lambda a}{\lambda b + \lambda c} + \frac{\lambda b}{\lambda a + \lambda c} + \frac{\lambda c}{\lambda a + \lambda b}$$

↳ Wir können o.B.d.A annehmen, dass $a+b+c = 1$ gilt.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + 3 = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} > 0$$

↖ wenn $x \in [0, 1)$

f konvex auf $[0, 1)$

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-a} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-b} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-c} = \frac{1}{3} f(a) + \frac{1}{3} f(b) + \frac{1}{3} f(c)$$

$$\text{Jensen} \rightarrow \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \text{LHS} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$



$$a\,g(b+c) + b\cdot g(a+c) + c\cdot g(a+b) \geq g\big(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)\big)$$

$$= g\big(a(1-a)+b(1-b)+c(1-c)\big)$$

$$= g(1-a^2-b^2-c^2)$$

Wann ist das am Größten, mit der Bedingung $a+b+c=1$?

g monoton fallend und $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

$$\geq g\left(1-\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Nach AM-QM $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

Zeige: Sind $x, y, z > 0$ mit $x + y + z = xyz$, dann gilt

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leq \frac{3}{4}$$

Zeige: sind $a, b, c > 0$, dann gilt

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

551246

Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_7 + x_5x_6x_1 + x_6x_7x_2 + x_7x_1x_3$$

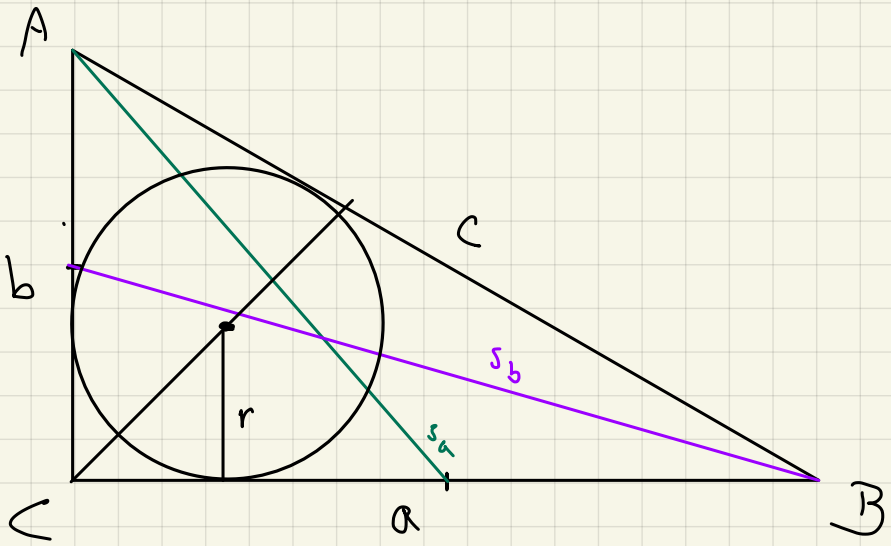
für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_7$ mit Summe 1. Man zeige, dass $f(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ einen maximalen Wert annimmt, und bestimme diesen.

In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichne r den Inkreisradius, s_a und s_b seien die Längen der Seitenhalbierenden der Katheten a und b.

Man beweise, dass dann stets die Ungleichung

$$\frac{r^2}{s_a^2 + s_b^2} \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$$

gilt.



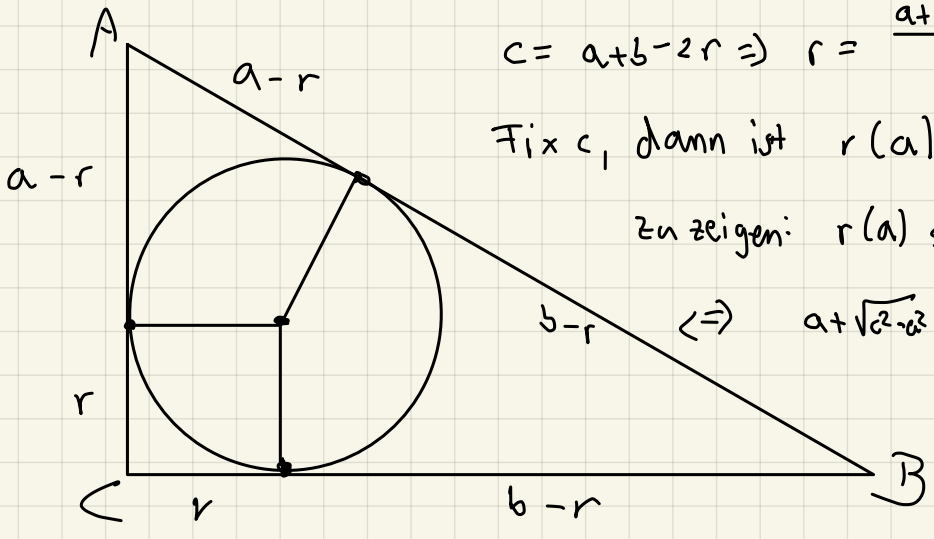
Nach Pythagoras: $s_a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$

$s_b^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$

$$s_a^2 + s_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2$$

$\Rightarrow$ zu zeigen: $\frac{r^2}{\frac{5}{4}c^2} \leq \frac{3-2\sqrt{2}}{5} \iff 4r^2 \leq 3 - 2\sqrt{2}\, c^2 = (\sqrt{2}-1)^2 c^2$

$\iff 2r \leq (\sqrt{2}-1)c$



$c = a + b - 2r \Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2}$

Fix c, dann ist $r(a) = \frac{a + \sqrt{c^2 - a^2} - c}{2}$

zu zeigen: $r(a) \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} c \quad \forall\, a \in [0, c]$

$\iff a + \sqrt{c^2 - a^2} \leq \sqrt{2}c \iff \frac{a + \sqrt{c^2-a^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} c$

AM-QM: $\frac{a + \sqrt{c^2 - a^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - a^2}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} c$ □

561236

Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\,,$$
$$y \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$$

erfüllen.

Angenommen, x, y erfüllen GLS. Dann sind $x, y \in [0,1]$

$\Rightarrow \exists$ eindeutige $\alpha, \beta \in [0, 90^\circ]$, sodass $x = \sin(\alpha)$

$y = \sin(\beta)$ und

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1) \quad \text{(I)}$$
$$\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1) \quad \text{(II)}$$

(I) + (II): $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \alpha+\beta = 60^\circ$ oder $\alpha+\beta = 120^\circ$

(I) − (II): $\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha-\beta = 30^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ$ oder $\alpha = 75^\circ, \beta = 45^\circ$

Funktionalgleichungen

Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sodass für alle* x, y *in* $\mathbb{R}$

$$f(xy) = xf(x) + yf(y). \qquad (*)$$

Angenommen, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, die $(*)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

$y = 0$ in $(*)$ ergibt $\quad f(0) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$

$x = y = 0$ ergibt $\quad f(0) = 0$

$x = 0$ einsetzen
$f(0)$ herausfinden

Das in (1) ergibt $\quad 0 = x f(x)$

↳ für $x \neq 0$ gilt $\quad f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Probe machen! In der Tat für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(xy) = 0 = 0 + 0 = x f(x) + y f(y)$$

↳ $f(x) = 0$ ist die einzige Lösung.

Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *sodass für alle* x, y *in* $\mathbb{R}^+$

$$x f(xy) = f(y). \qquad (*)$$

Angenommen, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion, die $(*)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ erfüllt.

$y = 1$ in $(*)$ ergibt $\quad x f(x) = f(1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$

$f(1) =: c$ ist eine Konstante.

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{f(1)}{x} \quad \text{(möglich, weil } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{c}{x} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}^+$$

Probe: Sei $c \in \mathbb{R}^+$ beliebig und $f(x) = \frac{c}{x}$. Dann gilt $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$

$$x f(xy) = x \cdot \frac{c}{xy} = \frac{c}{y} = f(y)$$

$\Rightarrow$ Die Lösungen sind genau $f(x) = \frac{c}{x}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}^+$.

(Finalrunde 2005) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle x, y in $\mathbb{R}^+$

$$f\left(yf(x)\right)(x+y) = x^2\left(f(x)+f(y)\right). \qquad (*)$$

Angenommen, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion, die (*) für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ erfüllt.

$x=y=1$ in (*) ergibt $2f(f(1)) = 2f(1) \Rightarrow f(f(1)) = f(1)$

$\hookrightarrow f(f(f(f(1)))) = f(1)$

$y=1$, $x=f(1)$ in (*) ergibt $f(f(1)) \cdot (f(1)+1) = f(1)^2 \left(f(f(1))+f(1)\right)$

$\Rightarrow f(1) \cdot (f(1)+1) = f(1)^2 (2f(1))$

$f(1) > 0 \longrightarrow \Rightarrow f(1)+1 = 2f(1)^2$

$\Rightarrow 2f(1)^2 - f(1) - 1 = 0 \Rightarrow f(1)^2 - \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2} = 0$

pq-Formel $\Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\Rightarrow f(1) = 1$ oder $f(1) = -\frac{1}{2}$

Da $f(1)$ positiv ist, ist $f(1) = 1$

$x=1$ in (*) $\quad f(y)(1+y) = 1 + f(y)$

$\Rightarrow f(y) \cdot y = 1$

$y \in \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow \Rightarrow f(y) = \frac{1}{y}$

Probe: $f(y f(x))(x+y) = \frac{1}{y \cdot \frac{1}{x}}(x+y)$

$= \frac{x}{y} \cdot (x+y) = \frac{x^2}{y} + x$

$x^2\left(f(x)+f(y)\right) = x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = x + \frac{x^2}{y}$ ✓

Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sodass für alle* x, y *in* $\mathbb{R}$

$$x + 2f(x) + f(f(y) - x) = y.$$

Eine Lösung ist $f(x) = -x$

$x = y = 0$ ergibt $\quad 2f(0) + f(f(0)) = 0$

$\hookrightarrow \quad 2f(0) = -f(f(0)) \qquad (1)$

$x = f(0),\ y = 0$ ergibt $\quad f(0) + 2f(f(0)) + f(0) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = 2f(f(0)) + 2f(0) \overset{(1)}{=} f(f(0))$

in (1) $\Rightarrow \quad 2f(0) = -0 \Rightarrow f(0) = 0$

$x = 0 \qquad 2f(0) + f(f(y)) = y \Rightarrow f(f(y)) = y$

$x = f(y) \qquad f(y) + 2f(f(y)) + f(0) = y$

$\Rightarrow \quad f(y) + 2y = y$

$\Rightarrow \quad f(y) = -y$

Probe!

Beispiel 10 *(Finalrunde 2004) Finde alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in $\mathbb{R}$,*

$$f(xf(x)+f(y)) = f(x)^2 + y.$$

$f(x) = -x$: $\quad -(-x^2 - y) = (-x)^2 + y \iff x^2 + y = x^2 + y$ (✓)

Vermutung $f(x) = x$

$f(x) = -x$

$x = y = -1$ ergibt $\quad 0 = f(0) = f(-1)^2 - 1$

f ist surjektiv, d.h. für jedes $z \in \mathbb{R}$ gibt es ein x, sodass $f(x) = z$ gilt.

Beweis: Fixiere x und lasse y von $-\infty$ bis ∞ laufen. Dann nimmt $f(x)^2 + y$ jeden Wert von $-\infty$ bis ∞ an. Da links nur $f(\dots)$ steht, muss f surjektiv sein.

$\Rightarrow$ Insbesondere gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(a) = 0$ gilt.

$x = a \rightsquigarrow \quad f(f(y)) = y \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$

$x = 0 \rightsquigarrow \quad f(f(y)) = f(0)^2 + y \quad \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

$f(-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow f(-1) = 1$ oder -1

$y = 0 \rightsquigarrow \quad f(x\, f(x)) = f(x)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (1)$

$f(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

f angewandt auf (1) ergibt

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. $x := f(t)$ ergibt in (1)

$f(f(t)\, f(f(t))) = f(f(t))^2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

$\iff f(f(t)\, t) = t^2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad (2)$

(1) und (2) $\Rightarrow \quad f(x)^2 = x^2$

$\Rightarrow \quad f(x) = x$ oder $-x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

⚠ Wir wissen noch nicht $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ oder $f(x) = -x\ \forall x \in \mathbb{R}$

Angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $f(a) = a$ und $f(b) = -b$ gilt. $x = a$, $y = b$ in (*)

$$f(a^2 - b) = a^2 + b$$

Entweder $f(a^2 - b) = a^2 - b = a^2 + b \Rightarrow -b = b \Rightarrow b = 0$ ↯

oder $f(a^2 - b) = -a^2 + b = a^2 + b \Rightarrow a^2 = -a^2 \Rightarrow a = 0$ ↯

□

Probe!

Finde alle $f\colon (-1;+\infty) \to (-1;+\infty)$ *sodass für alle* $x, y > 0$

$$f\left(xf(x-1)+yf(y-1)\right) = xf(3x-1).$$

Eine Lösung ist $f(x) = 0$

$I := (-1, \infty)$

$x = y = 1 \rightsquigarrow f(2f(0)) = f(2)$

Mit f auf beiden Seiten kürzen geht nur, wenn f injektiv ist, d.h. wenn für alle $x \neq x'$ gilt $f(x) = f(x')$

Rechte Seite enthält kein y, d.h. wenn x fix und y läuft von -1 bis ∞, dann ist die rechte Seite fix

$\Rightarrow$ $f(xf(x-1) + yf(y-1))$ ist fix $\forall\ y \in \mathbb{R}$.

Die linke Seite ist symmetrisch in x und y

Seien $a, b > 0$ beliebig

$x := a,\ y := b \rightsquigarrow f(af(a-1) + bf(b-1)) = af(3a-1) \quad \forall a, b > 0$

$x := b,\ y := a \rightsquigarrow f(bf(b-1) + af(a-1)) = bf(3b-1) \quad \forall a, b > 0$

$\Rightarrow af(3a-1) = bf(3b-1) \quad \forall a, b > 0$

$\Rightarrow xf(3x-1)$ ist konstant $\forall x > 0$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad xf(3x-1) = c \quad \forall x > 0$ gilt.

Sei $a \in I$ beliebig. $x := \frac{a+1}{3}$

$\rightsquigarrow \left(\frac{a+1}{3}\right) f(a) = c \quad \forall a \in I$ gilt.

$\Rightarrow f(a) = \frac{3c}{a+1} \quad \forall a \in I$

$\Rightarrow f(a) = \frac{c'}{a+1} \quad \forall a \in I$ $\qquad f(a) = 0$

$\hookrightarrow c' = 0$ oder 1 $\qquad f(a) = \frac{1}{a+1}$

(CSO 2001) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in $\mathbb{R}$

$$f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 \cdot f(x + y).$$

(Schweiz 1998) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle x, y in $\mathbb{R}$

$$f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

Beispiel 15 *Finde alle Funktionen* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:*

(a) $f(-x) = -f(x)$ *für alle* x *in* $\mathbb{R}$,

(b) $f(x+1) = f(x) + 1$ *für alle* x *in* $\mathbb{R}$,

(c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ *für alle* $x \neq 0$ *in* $\mathbb{R}$.

551234

Gegeben seien zwei teilerfremde positive ganze Zahlen n und m. Man zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen k die folgenden Aussagen (1) und (2) äquivalent sind:

(1) $n+m$ ist Teiler von n^2+km^2.
(2) $n+m$ ist Teiler von $k+1$. $\Leftrightarrow$ $k \equiv -1 \mod m+n$

Wir müssen zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (1) $\quad s = m+n$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Wenn (2) gilt, ist $k \equiv -1 \mod m+n$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} n^2+km^2 &\equiv n^2-m^2 \\ &= (n+m)(n-m) \\ &\equiv 0 \mod n+m \end{aligned}$$

Somit ist n^2+km^2 durch $n+m$ teilbar $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2)

$n^2+km^2 \equiv 0 \mod s$ $\qquad$ $n^2-m^2 \equiv 0 \mod s$

$\Rightarrow n^2+k(s-n)^2 \equiv 0 \mod s$ $\qquad$ $(k+1)m^2 \equiv 0 \mod s$

$\Rightarrow n^2+ks^2-2ksn+kn^2 \equiv 0 \mod s$

$\Rightarrow n^2+kn^2 \equiv 0 \mod s$

$\Rightarrow n^2(k+1) \equiv 0 \mod s$

wenn s und n^2 teilerfremd sind, dann folgt daraus

$(k+1) \equiv 0 \mod s$. $\Rightarrow$ (2)

warum sind $n+m$ und n^2 teilerfremd?

zz.: $ggT(n^2, n+m) = 1$

Nach Eukl. Alg. ist $ggT(n+m, n) = ggT(m, n) = 1$ (Annahme)

Also sind $n+m$ und n teilerfremd.

Also sind auch $n+m$ und n^2 teilerfremd.

551235

Es seien x, y und z drei reelle Zahlen mit Summe 0. Keine der drei Zahlen sei größer als 1.

a) Man beweise, dass

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \leq 9$$

gilt.

b) Für welche Werte von x, y und z tritt Gleichheit ein?

$0 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xy + xz + yz$

z.z.: $\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 \leq 9$

z.z.: $x^2+y^2+z^2 \leq 6$ Gleichheit gilt z.B. bei $x=-2,\ y=1,\ z=1$

Können wir zeigen, dass $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ nicht maximal ist, wenn noch zwei der drei Variablen kleiner als 1 sind?

Wenn $x,y,z \geq 0$ dann $f(x,y,z) \leq 3$, da $x,y,z \leq 1$

Also können wir annehmen, dass eine Variable negativ ist, sagen wir z.

Wenn x noch nicht 1 ist können wir x auf 1 erhöhen und z entsprechend verkleinern. Dadurch vergrößert sich $f(x,y,z)$ strong.

Also wird das Maximum nur erreicht wenn zwei Variablen 1 sind.

b) Gleichheit gilt bei $(-2,1,1)$, $(1,-2,1)$, $(1,1,-2)$

$g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$

Angenommen: $x < y < 1$. sei $0 < \varepsilon \leq 1-y$

Behauptung: $g(x-\varepsilon, y+\varepsilon, z) > g(x,y,z)$

Beweis: $x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + y^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + z^2 - (x-\varepsilon)(y+\varepsilon) - \underbrace{(x-\varepsilon)z - (y+\varepsilon)z}_{=-xz-yz}$

$> x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$

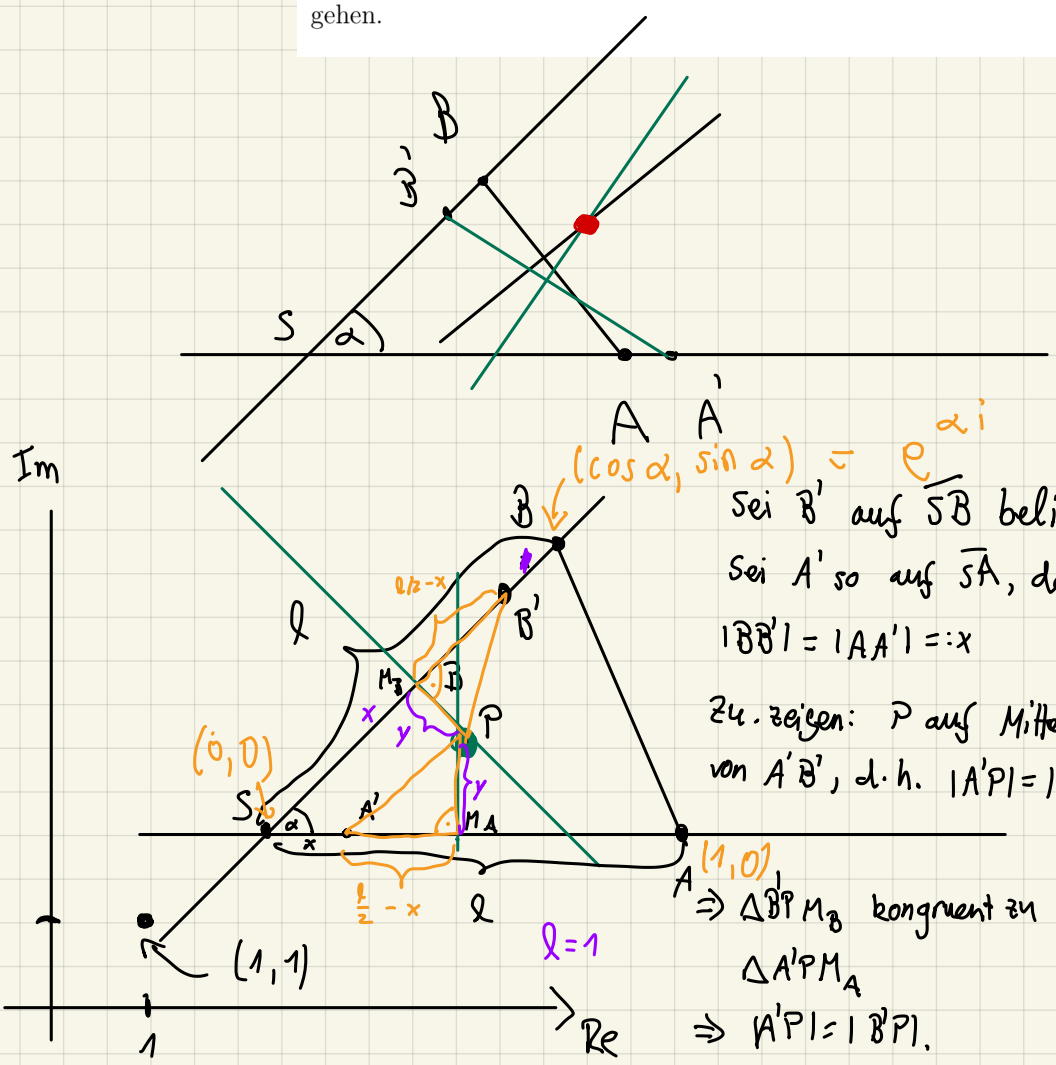
$\Leftrightarrow \quad -2\varepsilon x + \varepsilon^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2 - xy - \varepsilon x + \varepsilon y + \varepsilon^2 > -xy$

$\Leftrightarrow \quad 3\varepsilon^2 + 3(y-x)\varepsilon > 0$ Wahr weil $y \geq x$

551236

Gegeben sind eine Länge ℓ sowie ein Winkel α, welcher den Scheitelpunkt S hat und der größer als $0°$, aber kleiner als $180°$ ist. Der Punkt A bewegt sich auf dem einen Schenkel des Winkels α, der Punkt B auf dem anderen so, dass $|AS| + |SB| = \ell$ ist.

Man beweise, dass alle Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ durch ein und denselben Punkt gehen.



$M_B = \left(\frac{\cos\alpha}{2}, \frac{\sin\alpha}{2}\right)$

$B' = x e^{\alpha i}$

$= (x \cdot \cos\alpha, x \cdot \sin\alpha)$

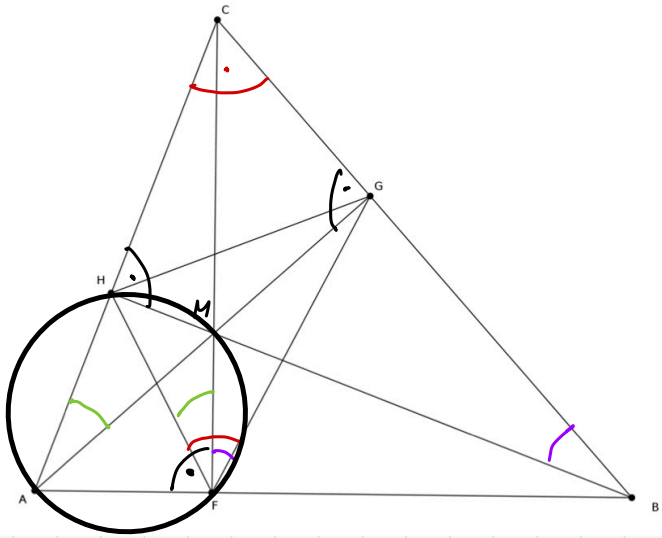
$A' = (1-x, 0)$

$P = \left(\frac{1}{2}, \quad\right)$

P liegt auf der Winkel-hal., also ist P von der Form $(x' \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, x' \cdot \sin\frac{\alpha}{2})$

□

1. In einem Dreieck ABC seien F, G, H die FuSSpunkte der Höhen wie in der Abbildung. Zeige: Diese Höhen halbieren die Winkel im Dreieck FGH.



AHMF ist Sehnenviereck

GMFB — " —

$\measuredangle + 90° + \measuredangle = 180° = \measuredangle + 90° + \measuredangle$

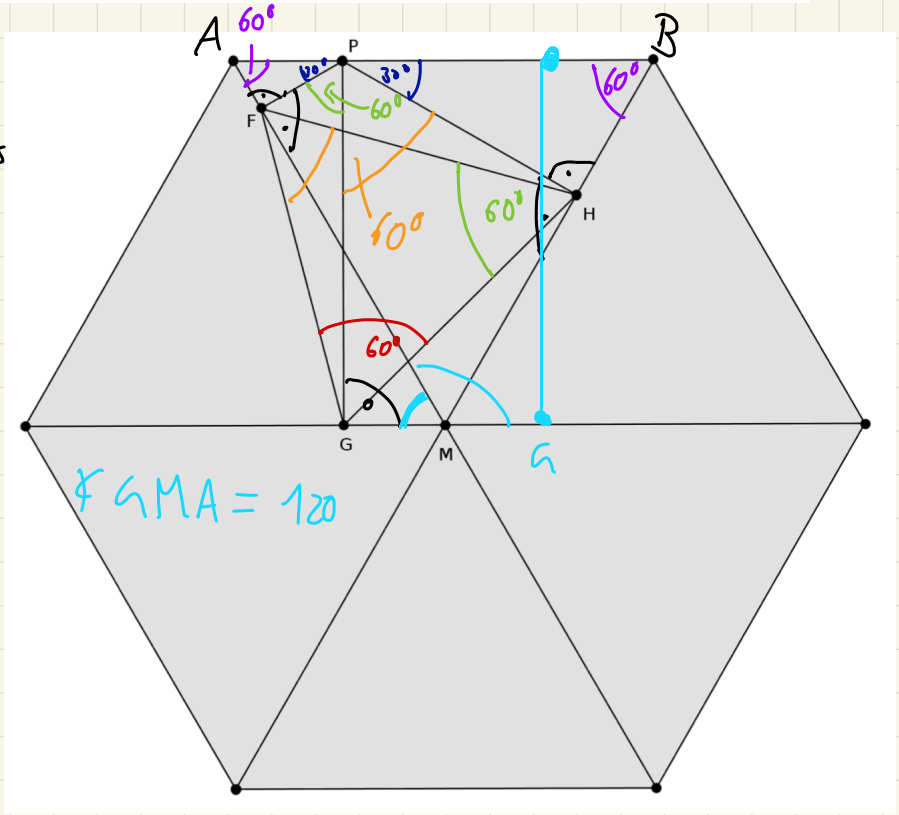
$\Rightarrow \quad \measuredangle = \measuredangle$

In einem regelmäSSigen Sechseck werden jeweils 2 gegenüberliegende Punkte durch eine Diagonale verbunden. Auf dem Rand des Sechsecks wird ein Punkt P gewählt. Von P aus werden die 3 Lote auf die 3 Diagonalen gefällt. Die FuSSpunkte sind F, G, H. Zeige, dass die Winkel im Dreieck FGH unabhängig von der Wahl des Punktes P sind.

ΔFGH gleichseitig?

PFGMH liegen auf einem Kreis

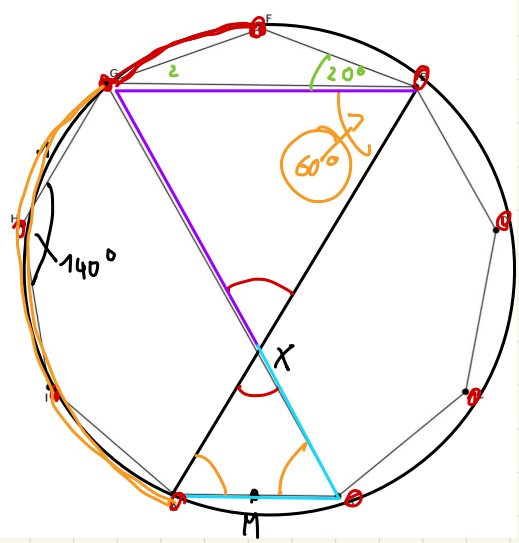
Auf Lagebeziehungen achten



Zeige, dass in einem regelmäSSigen Neuneck die Differenz der Länge der längsten und der kürzesten Diagonalen gleich die Seitenlänge des Neunecks ist!

$180° \cdot \frac{(n-2)}{n}$

$= 180° \cdot \frac{7}{9} = 140°$



$\triangle ABX \sim \triangle EXG$

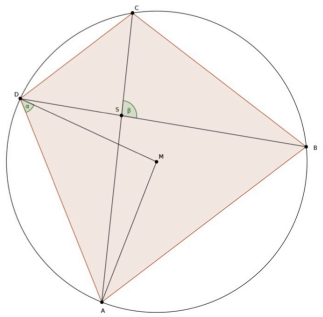
$\frac{|XB|}{|AB|} = \frac{(|BG| - |XB|)}{|GE|}$

Wenn GEX gleichseitig, sind wir fertig

6. Sei $ABCD$ ein Viereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen und dessen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ die gleiche Länge besitzen.

   (a) Ermittle allgemein die WinkelgröSSe α des Winkels $\sphericalangle ADM$ in Abhängigkeit von der WinkelgröSSe β des Winkels $\sphericalangle BSC$.

   (b) Beweise, dass die Punkte A, M, S, D unter den genannten Voraussetzungen stets auf ein und demselben Kreis liegen.



7. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Umkreis k. Es seien Q der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, R der Fußpunkt des Lotes von C auf die Tangente an k durch A, und S der Fußpunkt des Lotes von C auf die Tangente an k durch B.

Beweise:

$$|CQ|^2 = |RC| \cdot |CS|$$

