SCHLESWIG-HOLSTEINS TAG DER MATHEMATIK

TEAMWETTBEWERB KLASSE 9/10

Regeln.

- Auf den folgenden Seiten findet ihr zehn Aufgaben. Die erste ist ein Kreuzzahlrätsel, danach gibt es drei Aufgabenkategorien: *2. Damit kann man rechnen! 3. Logisch!* und *4. Gut kombiniert, Watson!*
- In jeder der drei Kategorien findet ihr drei Aufgaben. Diese bringen je nach Schwierigkeit 8 oder 9 Punkte. Ihr dürft zu jeder Aufgabe eine Lösung abgeben (nicht mehrere!), aber am Ende zählen in jeder Kategorie nur die zwei punktmäßig besten Aufgaben zu eurer Gesamtpunktzahl.
- Die Lösungen sollen direkt unter die Aufgabe und ggf. auf die Rückseite desselben Blattes geschrieben werden. Auf jedem abgegebenen Lösungsblatt muss der Teamname geschrieben sein.
- Teams, die nur aus drei (oder weniger) Schülerinnen und Schülern bestehen, erhalten einen Joker. Das bedeutet, bei einer Aufgabe dürfen sie, statt diese zu bearbeiten, auf das Lösungsblatt fett JOKER schreiben. Dann bekommen sie bei der Korrektur für diese Aufgabe insgesamt genau 6 Punkte.
- Ihr habt genau zwei Stunden Zeit für die Bearbeitung. Die Aufsicht in eurem Raum legt Startzeit und Endzeit fest. Am Ende dieser Zeit müssen die Lösungen bei der Aufsicht im Raum abgegeben werden.
- Es ist erlaubt (und erwünscht) innerhalb des Teams über die Aufgaben zu reden. Mit anderen Teams darf während des Wettbewerbs nicht über die Aufgaben gesprochen werden.
- Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug und Zeichenwerkzeug erlaubt. Insbesondere sind Taschenrechner und alle anderen elektronischen Hilfsmittel verboten.
- Korrektur und Bewertung der abgegebenen Lösungen erfolgt durch eine Jury aus Mitarbeitenden der CAU und der EUF. Diese entscheiden endgültig über die Bepunktung, Einsprüche sind nicht zugelassen.

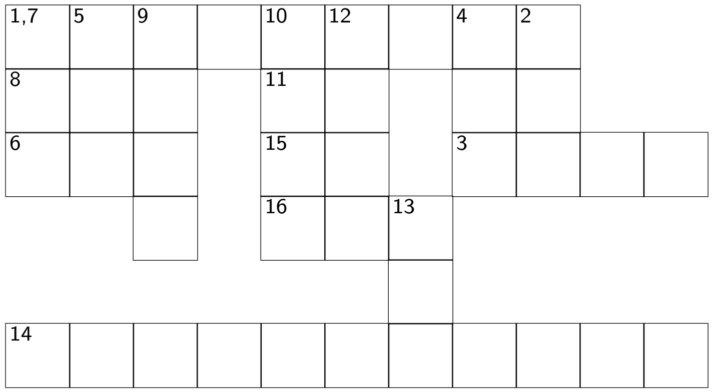
Viel Spaß bei den Aufgaben!

1.	2.1.	2.2.	2.3	3.1.	3.2.	3.3.	4.1	4.2.	4.3.	Gesamt

Date: 15. Juli 2024.

1. Aufgabe: Vorsicht Kreuzung!

Füllt das Gitter anhand der Hinweise aus.



Horizontal

1 Das Quadrat der Schnapszahl 11111

3 Das (recht aktuelle) Produkt der Zahlen 23, 11 und 8

6 Über eine natürliche Zahl ist bekannt: Sie ist größer als 100, aber kleiner als 200. Sie ist durch 2 teilbar, aber nicht durch 4. Sie ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9. Sie ist durch 5 teilbar. Wie lautet die Zahl?

8 Die kleinste dreistellige Kubikzahl

11 Eine Primzahl, die rückwärts gelesen auch eine Primzahl ist

14 Gesucht ist die kleinste elfstellige Zahl, die durch 9 teilbar ist und in der alle Ziffern vorkommen.

15 Eine Primzahl, die rückwärts gelesen auch eine Primzahl ist

16 Eine Primzahl, die rückwärts gelesen auch eine Primzahl ist

Vertikal

2 Die Anzahl der Tage, die von heute an bis zu einem Datum vergehen, an dem Tag, Monat und Jahr allesamt Quadratzahlen sind.

4 Gesucht ist der Wert des Ausdrucks $403 - 402 + 401 - 400 + \ldots + 3 - 2 + 1$. Hier betrachten wir die absteigenden Zahlen $403, 402, 401, \ldots, 2, 1$ und rechnen abwechselnd plus und minus.

5 Gesucht ist die Summe $1 + 3 + 5 + \ldots + 29$ der ersten 15 ungeraden Zahlen

7 Von der Piratenbucht zum Seemannsgrab sind es 30 m. Vom Seemannsgrab zum Kliff sind es 81 m. Vom Kliff zum Leuchtturm sind es 67 m. Von der Piratenbucht zum Leuchtturm sind es 178 m. Wie viele Meter sind es von der Piratenbucht zum Kliff?

9 Gesucht ist eine positive ganze Zahl, die durch 9 ohne Rest teilbar ist.

10 Gesucht ist die Zahl $a \cdot b$, wobei a und b natürliche Zahlen sind, die in der Summe $a + b = 228$ ergeben und in der Differenz $a - b = 170$.

12 Eine Zahl, die mit der dritten Potenz ihrer Quersumme übereinstimmt

13 Wie viele Grad hat ein Winkel in einem regelmäßigen Achteck?

2. Damit kann man rechnen!

Von den drei Aufgaben in diesem Abschnitt werden alle Aufgaben, die ihr abgebt, korrigiert. Die zwei Aufgaben, bei denen ihr am meisten Punkte erhaltet, gehen in die Wertung für eure Gesamtpunktzahl ein, die Aufgabe in diesem Abschnitt, bei der ihr am wenigsten Punkte erhaltet, geht nicht in die Wertung ein.

2.1. **Traumdeutung.** *8 Punkte* Srinivasa Ramanujan (1887-1920) war ein genialer und zugleich geheimnisvoller indischer Mathematiker. Obwohl er in Isolation lebte und fast keine formale Ausbildung in Mathematik hatte, leistete er bedeutende Beiträge zur Analysis und Zahlentheorie, einschließlich Lösungen für Probleme, die zu dieser Zeit als unlösbar galten. Er besaß ein außergewöhnliches Talent für die Erstellung kurioser Gleichungen, zu denen ihn, wie er oft behauptete, die indische Göttin Namagiri in seinen Träumen inspirierte.

Eines Nachts flüsterte ihm die Göttin zwei verschiedene Tripel (a, b, c) und (d, e, f) (es dürfen Zahlen in dem Tripel gleich sein) natürlicher Zahlen zu, für die

$$a + b + c = d + e + f,$$
$$a^a \cdot b^b \cdot c^c = d^d \cdot e^e \cdot f^f$$

gilt. Findet passende Werte für d, e und f, wenn die Werte $a = 1$, $b = 8$ und $c = 9$ gegeben sind.

2.2. **In der Kürzung liegt die Würzung.** *8 Punkte* Berechnet

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1+3}{2\cdot 3}\cdot\frac{1+3+5}{3\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}{10\cdot 11}\right)^4$$

und gebt das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

2.3. **Cyclos Closcy.** *9 Punkte* Cyclos Closcy der Phönix ist 142857 Jahre alt.

(1) *2 Punkte* Berechnet, in wie vielen Jahren Cyclos Closcy dreimal so alt ist wie jetzt und wie viele Jahre er dann alt ist.

(2) *4 Punkte* 142857 heißt Phönix-Zahl oder etwas nüchterner auch: zyklisch. Untersucht, warum die Zahl zyklisch heißt!

(3) *1 Punkt* Die Zahl hat nicht nur $7 - 1$ Stellen. Sondern auch darüber hinaus hat sie eine enge Beziehung zur 7. Beschreibt diese!

(4) *2 Punkte* Die nächste zyklische Zahl hat so eine Beziehung zu einer anderen (zweistelligen) Primzahl kleiner als 20. Findet die nächste zyklische Zahl.

3. Logisch!

Von den drei Aufgaben in diesem Abschnitt werden alle Aufgaben, die ihr abgebt, korrigiert. Die zwei Aufgaben, bei denen ihr am meisten Punkte erhaltet, gehen in die Wertung für eure Gesamtpunktzahl ein, die Aufgabe in diesem Abschnitt, bei der ihr am wenigsten Punkte erhaltet, geht nicht in die Wertung ein.

3.1. **Sudoku.** *9 Punkte* Selma hat für die lange Zugfahrt nach Kiel ein Sudoku eingepackt. Da es beim Umsteigen ziemlich geregnet hat, ist allerdings eine der vorgegebenen Zahlen – gekennzeichnet durch ein ? – unleserlich geworden. Selma weiß, dass das Sudoku ursprünglich eindeutig lösbar war. Sie überlegt, welche Zahl an der Stelle gestanden haben könnte.

1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

Hinweis: Bei diesem Sudoku darf jede der Zahlen von 1 bis 6 in jeder Zeile, jeder Spalte und jedem markierten 2×3-Feld nur genau einmal auftreten.

Welche Zahl(en) könnte(n) an der Stelle des **?** stehen, damit das Sudoku eindeutig lösbar ist?

Benutzt gerne die Vorlagen, um eure Lösung zu finden und zu erklären:

1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

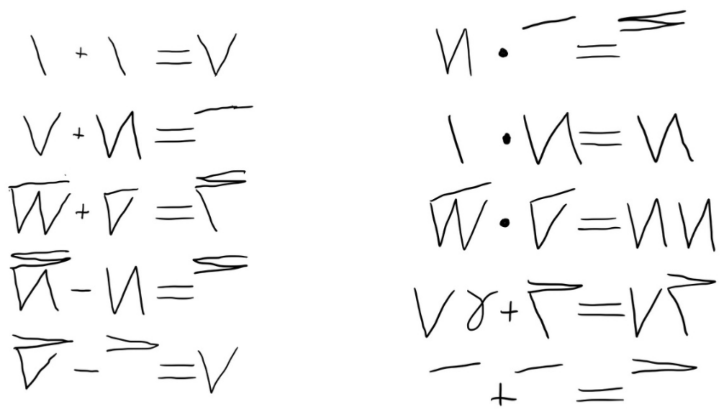
1					
		?			
			4	1	2
	6		5		
2				6	4

3.2. **Soccical.** *8 Punkte* Frida, Kerstin, Christian und Philipp gucken gerne gemeinsam Fußball und haben sich gestern das EM-Finale angesehen. Während des Spiels gab es Popcorn, Amerikaner, Kräuterbaguette und Limo, wobei jede Person genau eines davon mitgebracht hat. Eigentlich waren die vier bei der EM für Belgien, Österreich, Spanien und Deutschland.
Für den Ausgang des Finales haben sie 0:1, 1:2, 2:1 und 5:4 getippt. (Die Reihenfolge, in der die Namen, Lebensmittel, Mannschaften und Tipps aufgelistet sind, sagen nichts über die Zuordnung aus.)

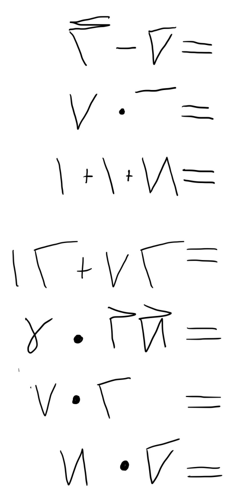
(1) Christian war für ein Nachbarland von Deutschland.
(2) Kerstin und Philipp haben beide getippt, dass genau drei Tore fallen.
(3) Die leckeren Amerikaner waren dreifarbig in den Landesfarben des Lieblingsteams der Bäckerin verziert.
(4) Die Lieblingsmannschaft der Person, die fürs Finale 5:4 getippt hat, ist im Viertelfinale ausgeschieden. Die Person, die sowohl beim Viertelfinale als auch beim Finale Kräuterbaguette dabei hatte, war damals nicht für das Siegerteam.
(5) Die Personen, deren Teams schon im Achtelfinale ausgeschieden sind (Belgien und Österreich), haben für das Finale beide getippt, dass das gleiche Team gewinnt und damit EM-Sieger wird.
(6) Kerstin ist seit ihrem letzten Wien-Urlaub so begeistert von dem entsprechenden Land, dass sie auch bei der EM für die Mannschaft war.
(7) Die Limo wurde weder vom Spanien- noch vom Österreich-Fan mitgebracht.

(a) *4 Punkte* Welche Person war bei der EM jeweils für welches Team?
(b) *4 Punkte* Gebt an, wer welches Ergebnis im Finale getippt hat und wer was mitgebracht hat.

3.3. **Inuit.** *9 Punkte*[1] Die Inupiaq-Sprache, die von den in Alaska lebenden Inupiat gesprochen wird, hat ein eigenes Zahlsystem, für das es lange keine Schrift gab. Während eines Mathe-Enrichment Kurses an der Harold Kaveolook School in Katovik, Alaska in den frühen 90er Jahren haben alle 9 Schülerinnen und Schüler der Schule zusammen, weil sie fanden, Arabische Zahlen passten nicht zu ihrem Zahlsystem, eine eigene Zahlschrift erfunden. Diese sollte Effizient und leicht zu verstehen sein und die Zeichen sollten sowohl gut zu den Zahlen als auch zur Sprache Inuktitut passen.



(1) *7 Punkte* Oben findet ihr einige bereits gelöste Rechenaufgaben in dieser Zahlschrift, unten ungelöste. Löst die Aufgaben unten! Natürlich sind die Ergebnisse ebenfalls in der Inuktitut-Zahlschrift anzugeben.
(2) *2 Punkte* Gebt das heutige Datum (Format tt.mm.jjjj) in der Zahlschrift an!



[1]Diese Aufgabe basiert auf einer Aufgabe der Linguistik-Olympiade

4. Gut Kombiniert, Watson!

Von den drei Aufgaben in diesem Abschnitt werden alle Aufgaben, die ihr abgebt korrigiert. Die zwei Aufgaben, bei denen ihr am meisten Punkte erhaltet, gehen in die Wertung für eure Gesamtpunktzahl ein, die Aufgabe in diesem Abschnitt, bei der ihr am wenigsten Punkte erhaltet, geht nicht in die Wertung ein.

4.1. **Werwolf.** *8 Punkte* Bei einem Mathecamp spielen 120 Schülerinnen und Schüler eine ganz besondere, selbst ausgedachte Variante des Werwolf-Spiels. Dabei können die Spielenden Dorfbewohner, Vampir oder Werwolf sein. Es ist aber (anders als beim 'normalen' Spiel) auch möglich, zwei der drei Rollen oder sogar alle drei gleichzeitig zu haben!

(1) Für genau 102 der 120 Spielenden gilt: Jeder von diesen 102 Spielenden hat mindestens eine der Rollen Werwolf oder Vampir.
(2) Für genau 75 der 120 Spielenden gilt: Jeder von diesen 75 Spielenden hat mindestens eine der Rollen Vampir oder Dorfbewohner.
(3) Genau 18 der 120 Spielenden sind nur Vampir.
(4) Die Zahl der Spielenden, die genau die beiden Rollen Werwolf und Vampir haben, ist um 9 größer als die Zahl derer, die genau die beiden Rollen Dorfbewohner und Vampir haben.
(5) Keiner der 120 Spielenden ist sowohl Werwolf als auch Dorfbewohner.

Der völlig verwirrte Spielleiter möchte aus diesen Informationen ermitteln, wie viele der Spielenden je genau eine der drei Rollen und wie viele je genau zwei der drei Rollen haben. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!

4.2. **Zauberhafter Würfel.** *8 Punkte* Aus 27 kleinen, gelben Würfeln mit Kantenlänge 1 cm wird ein großer Würfel mit der Kantenlänge 3 cm gebaut. Durch Tauschen eines komplett gelben mit einem komplett schwarzen kleinen Würfels sollen Teile des großen Würfels schwarz gefärbt werden.

(1) *3 Punkte* Wie viele kleine Würfel muss man mindestens tauschen, damit genau 17 cm^2 der Oberfläche des großen Würfels schwarz sind?

(2) *3 Punkte* Wie viele Würfel darf man höchstens tauschen, damit genau 17 cm^2 der Oberfläche des großen Würfels schwarz sind?

(3) *2 Punkte* Lassen sich für alle Anzahlen schwarzer kleiner Würfel zwischen eurer bestimmten Minimalanzahl und eurer Maximalanzahl durch Anmalen genau 17 cm^2 der Oberfläche großen Würfels schwarz färben?

4.3. **Die Quadratur des Quadrats.** *9 Punkte* Ein großes Quadrat ist in kleinere Quadrate aufgeteilt. Diese wurden so eingefärbt, dass zwei Quadrate genau dann die gleiche Farbe haben, wenn sie auch gleich groß sind. Außerdem ist Folgendes bekannt:

(1) Nur an einer Stelle liegen zwei gleichfarbige Quadrate nebeneinander, diese sind beide gelb.
(2) Insgesamt ist die Anzahl der Teilquadrate um Eins kleiner als die Seitenlänge des großen Quadrates.
(3) Ein blaues und ein grünes Quadrat haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie ein rotes Quadrat.
(4) Die kleinsten Quadrate sind gelb, haben eine ganzzahlige Seitenlänge und alle anderen Quadrate haben Seitenlängen, welche Vielfache der Seitenlänge eines gelben Quadrates sind.
(5) Das grüne Quadrat würde genau neun Mal in das große Quadrat passen, allerdings kommt es nur ein Mal vor.
(6) Das halbe große Quadrat ließe sich mit lila Quadraten lückenlos und überschneidungsfrei auslegen.
(7) Es gibt nur genau ein orangenes Quadrat, dieses hat den Flächeninhalt 49 und kein anderes farbiges Quadrat hat einen größeren Flächeninhalt.

Bestimmt die Seitenlängen der Quadrate einer jeden Farbe sowie des großen Quadrates und gebt an, wie viele farbige Quadrate es jeweils gibt. (Die beschriebene Aufteilung ist tatsächlich möglich, muss allerdings nicht angegeben werden.)