SCHLESWIG-HOLSTEINS TAG DER MATHEMATIK

TEAMWETTBEWERB KLASSE 7/8

Regeln.

- Auf den folgenden Seiten findet ihr zehn Aufgaben. Die erste ist ein Kreuzzahlrätsel, danach gibt es drei Aufgabenkategorien: *2. Damit kann man rechnen! 3. Logisch!* und *4. Gut kombiniert, Watson!*
- In jeder der drei Kategorien findet ihr drei Aufgaben. Diese bringen je nach Schwierigkeit 8 oder 9 Punkte. Ihr dürft zu jeder Aufgabe eine Lösung abgeben (nicht mehrere!), aber am Ende zählen in jeder Kategorie nur die zwei punktmäßig besten Aufgaben zu eurer Gesamtpunktzahl.
- Die Lösungen sollen direkt unter die Aufgabe und ggf. auf die Rückseite desselben Blattes geschrieben werden. Auf jedem abgegebenen Lösungsblatt muss der Teamname geschrieben sein.
- Teams, die nur aus drei (oder weniger) Schülerinnen und Schülern bestehen, erhalten einen Joker. Das bedeutet, bei einer Aufgabe dürfen sie, statt diese zu bearbeiten, auf das Lösungsblatt fett JOKER schreiben. Dann bekommen sie bei der Korrektur für diese Aufgabe insgesamt genau 6 Punkte.
- Ihr habt genau zwei Stunden Zeit für die Bearbeitung. Die Aufsicht in eurem Raum legt Startzeit und Endzeit fest. Am Ende dieser Zeit müssen die Lösungen bei der Aufsicht im Raum abgegeben werden.
- Es ist erlaubt (und erwünscht) innerhalb des Teams über die Aufgaben zu reden. Mit anderen Teams darf während des Wettbewerbs nicht über die Aufgaben gesprochen werden.
- Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug und Zeichenwerkzeug erlaubt. Insbesondere sind Taschenrechner und alle anderen elektronischen Hilfsmittel verboten.
- Korrektur und Bewertung der abgegebenen Lösungen erfolgt durch eine Jury aus Mitarbeitenden der CAU und der EUF. Diese entscheiden endgültig über die Bepunktung, Einsprüche sind nicht zugelassen.

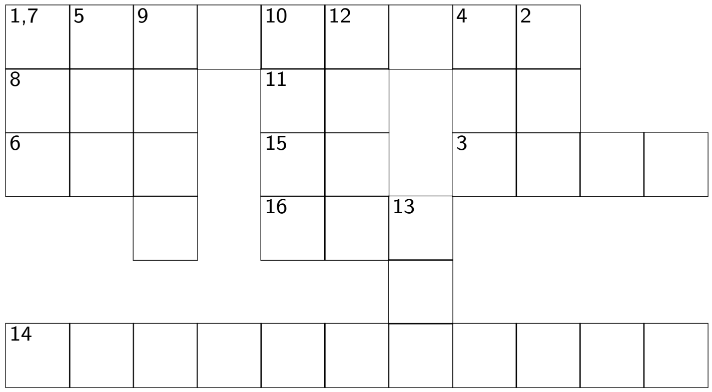
Viel Spaß bei den Aufgaben!

1.	2.1.	2.2.	2.3	3.1.	3.2.	3.3.	4.1	4.2.	4.3.	Gesamt

Date: 15. Juli 2024.

1. Aufgabe: Vorsicht Kreuzung!

Füllt das Gitter anhand der Hinweise aus.



Horizontal

1 $11111 \cdot 11111$

3 Das (recht aktuelle) Produkt der Zahlen 23, 11 und 8

6 Über eine natürliche Zahl ist bekannt: Sie ist größer als 100, aber kleiner als 200. Sie ist durch 2 teilbar, aber nicht durch 4. Sie ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9. Sie ist durch 5 teilbar. Wie lautet die Zahl?

8 Die kleinste dreistellige Kubikzahl (d.h. eine Zahl z die man als $z = x \cdot x \cdot x$ mit einer natürlichen Zahl x schreiben kann)

11 Eine Primzahl, die rückwärts gelesen auch eine Primzahl ist

14 Gesucht ist die kleinste elfstellige Zahl, die durch 9 teilbar ist und in der alle Ziffern vorkommen.

15 Eine Primzahl, die rückwärts gelesen auch eine Primzahl ist

16 Eine Primzahl, die rückwärts gelesen auch eine Primzahl ist

Vertikal

2 Die Anzahl der Tage, die von heute an bis zu einem Datum vergehen, an dem Tag, Monat und Jahr allesamt Quadratzahlen sind.

4 Gesucht ist der Wert des Ausdrucks $403 - 402 + 401 - 400 + \ldots + 3 - 2 + 1$. Hier betrachten wir die absteigenden Zahlen $403, 402, 401, \ldots, 2, 1$ und rechnen abwechselnd plus und minus.

5 Gesucht ist die Summe $1 + 3 + 5 + \ldots + 29$ der ersten 15 ungeraden Zahlen

7 Von der Piratenbucht zum Seemannsgrab sind es 30 m. Vom Seemannsgrab zum Kliff sind es 81 m. Vom Kliff zum Leuchtturm sind es 67 m. Von der Piratenbucht zum Leuchtturm sind es 178 m. Wie viele Meter sind es auf kürzestem Wege von der Piratenbucht zum Kliff?

9 Gesucht ist eine positive ganze Zahl, die durch 9 ohne Rest teilbar ist.

10 Gesucht ist die Zahl $a \cdot b$, wobei a und b natürliche Zahlen sind, die in der Summe $a + b = 228$ ergeben und in der Differenz $a - b = 170$.

12 Eine Zahl, die mit der dritten Potenz ihrer Quersumme übereinstimmt

13 Wie viele Grad hat ein Winkel in einem regelmäßigen Achteck?

2. Damit kann man rechnen!

In diesem Abschnitt finden sich drei Aufgaben, in denen es darum geht, zu rechnen. Neben der direkten „Holzhammer-Methode“ gibt es meistens auch (mindestens) eine kurze, elegante Lösung. Von den drei Aufgaben in diesem Abschnitt werden alle Aufgaben, die ihr abgebt, korrigiert. Die zwei Aufgaben, bei denen ihr am meisten Punkte erhaltet, gehen in die Wertung für eure Gesamtpunktzahl ein, die Aufgabe in diesem Abschnitt, bei der ihr am wenigsten Punkte erhaltet, geht nicht in die Wertung ein.

2.1. **In der Kürzung liegt die Würzung.** *8 Punkte* Berechnet

$$\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1+3}{2\cdot 3}\cdot\frac{1+3+5}{3\cdot 4}\cdot\frac{1+3+5+7}{4\cdot 5}\cdot\frac{1+3+5+7+9}{5\cdot 6}\cdot\frac{1+3+5+7+9+11}{6\cdot 7}\cdot\frac{1+3+5+7+9+11+13}{7\cdot 8}$$

und gebt das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

2.2. **Keine Neun.** *8 Punkte*

(1) *6 Punkte* Welche ist die kleinste positive Zahl n, die mit 99 multipliziert ein Produkt ergibt, welches – in Dezimalschreibweise – keine Neun [für Österreicher zu lesen als: *keinen Neuner*] unter seinen Ziffern hat?

(2) *2 Punkte* Welche ist die kleinste positive Zahl n, die mit 999 multipliziert ein Produkt ergibt, welches – in Dezimalschreibweise – keine Neun unter seinen Ziffern hat?

2.3. **Cyclos Closcy.** *9 Punkte* Cyclos Closcy der Phönix ist 142857 Jahre alt.

(1) *2 Punkte* Berechnet, in wie vielen Jahren Cyclos Closcy dreimal so alt ist wie jetzt und wie viele Jahre er dann alt ist.

(2) *4 Punkte* 142857 heißt Phönix-Zahl oder etwas nüchterner auch: zyklisch. Untersucht, warum die Zahl zyklisch heißt!

(3) *1 Punkt* Die Zahl hat nicht nur $7 - 1$ Stellen, sondern auch darüber hinaus hat sie eine enge Beziehung zur 7. Beschreibt diese!

(4) *2 Punkte* Die nächste zyklische Zahl hat so eine Beziehung zu einer anderen (zweistelligen) Primzahl kleiner als 20. Findet die nächste zyklische Zahl.

3. Logisch!

Von den drei Aufgaben in diesem Abschnitt werden alle Aufgaben, die ihr abgebt, korrigiert. Die zwei Aufgaben, bei denen ihr am meisten Punkte erhaltet, gehen in die Wertung für eure Gesamtpunktzahl ein, die Aufgabe in diesem Abschnitt, bei der ihr am wenigsten Punkte erhaltet, geht nicht in die Wertung ein.

3.1. *8 Punkte* Loki, Hel und Thor treten vor Odin zu einem Ehrlichkeitswettbewerb an. Dabei sagen Sie:

(1) Loki: „Thor ist nicht der Ehrlichste."
(2) Hel: „Ich bin die Ehrlichste."
(3) Thor: „Hel ist nicht am ehrlichsten."
(4) Loki: „Ich bin am ehrlichsten!"
(5) Thor: „Ich bin am ehrlichsten."

Selbstverständlich sagt nur der bzw. die Ehrlichste die Wahrheit, die anderen beiden lügen immer. Kann Odin aus den Aussagen eindeutig ermitteln, wer am ehrlichsten ist?

3.2. Sudoku. *8 Punkte* Selma hat für die lange Zugfahrt nach Kiel ein Sudoku eingepackt. Da es beim Umsteigen ziemlich geregnet hat, ist allerdings eine der vorgegebenen Zahlen – gekennzeichnet durch ein ? – unleserlich geworden. Selma weiß, dass das Sudoku ursprünglich eindeutig lösbar war. Sie überlegt, welche Zahl an der Stelle gestanden haben könnte.

3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

Hinweis: Bei diesem Sudoku darf jede der Zahlen von 1 bis 6 in jeder Zeile, jeder Spalte und jedem markierten 2×6*-Feld nur genau einmal auftreten.*

(1) Zwei Zahlen könnten auf gar keinen Fall an der Stelle des '?' gestanden haben. Findet diese beiden Zahlen!

(2) Gebt eine Zahl an so, dass mit dieser Zahl an der Stelle des '?' das Sudoku eindeutig lösbar ist!

Benutzt gern die folgenden Felder als Teil eurer Lösung:

3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

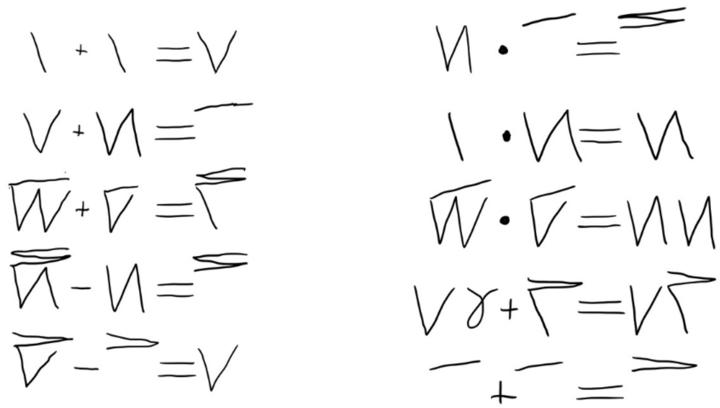
3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

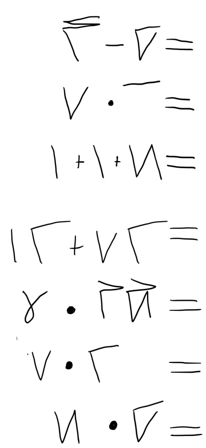
3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

3					
		?			
			2	3	1
	4		6		
1				4	2

3.3. Inuit. *9 Punkte*[1] Die Inupiaq-Sprache, die von den in Alaska lebenden Inupiat gesprochen wird, hat ein eigenes Zahlsystem, für das es lange keine Schrift gab. Während eines Mathe-Enrichment-Kurses an der Harold Kaveolook School in Katovik, Alaska, in den frühen 90er-Jahren haben alle 9 Schülerinnen und Schüler der Schule zusammen eine eigene Zahlschrift erfunden, weil sie fanden, arabische Zahlen passten nicht zu ihrem Zahlsystem. Diese sollte effizient und leicht zu verstehen sein und die Zeichen sollten sowohl gut zu den Zahlen als auch zur Sprache Inuktitut passen.



(1) *7 Punkte* Oben findet ihr einige bereits gelöste Rechenaufgaben in dieser Zahlschrift, unten ungelöste. Löst die Aufgaben unten! Natürlich sind die Ergebnisse ebenfalls in der Inuktitut-Zahlschrift anzugeben.
(2) *2 Punkte* Gebt das heutige Datum (Format tt.mm.jjjj) in der Zahlschrift an!



[1]Diese Aufgabe basiert auf einer Aufgabe der Linguistik-Olympiade

4. Gut Kombiniert, Watson!

Von den drei Aufgaben in diesem Abschnitt werden alle Aufgaben, die ihr abgebt, korrigiert. Die zwei Aufgaben, bei denen ihr am meisten Punkte erhaltet, gehen in die Wertung für eure Gesamtpunktzahl ein, die Aufgabe in diesem Abschnitt, bei der ihr am wenigsten Punkte erhaltet, geht nicht in die Wertung ein.

4.1. Drei Zeitungen. *8 Punkte* Genau 100 Schülerinnen und Schüler einer Schule haben mindestens eine der Zeitungen *Spektrum der Wissenschaft*, *GEO* oder *Die Wurzel* abonniert, eventuell auch mehrere davon. Insgesamt 52 haben *Spektrum* abonniert. Insgesamt 40 haben *GEO* abonniert. Insgesamt 29 besitzen mindestens zwei Abos. 5 Schülerinnen und Schüler besitzen sogar drei Abos. Wie viele Schülerinnen und Schüler an der Schule haben *Die Wurzel* abonniert?

4.2. Zauberhafter Würfel. *8 Punkte* Aus 27 kleinen, gelben Würfeln mit Kantenlänge 1 cm wird ein großer Würfel mit Kantenlänge 3 cm gebaut. Durch Tauschen eines komplett gelben mit einem komplett schwarzen kleinen Würfels sollen Teile des großen Würfels schwarz gefärbt werden.

(1) *3 Punkte* Wie viele kleine Würfel muss man mindestens tauschen, damit genau $13\,\text{cm}^2$ der Oberfläche des großen Würfels schwarz sind?

(2) *3 Punkte* Wie viele kleine Würfel darf man höchstens tauschen, damit genau $13\,\text{cm}^2$ der Oberfläche des großen Würfels schwarz sind?

(3) *2 Punkte* Lassen sich für alle Anzahlen schwarzer kleiner Würfel zwischen eurer bestimmten Minimalanzahl und eurer Maximalanzahl durch Anmalen genau 13 sichtbare Quadratzentimeter des großen Würfels schwarz färben?

4.3. Viele Fünfecke. *9 Punkte* Ein Fünfeck heißt *konvex*, wenn alle Diagonalen im Inneren liegen (das sind alle Verbindungen zweier Eckpunkte, die nicht schon Seitenlinien sind). In dieser Aufgabe wollen wir nun ein regelmäßiges Fünfeck (alle Seiten sind gleich lang und alle Winkel gleich groß) in konvexe Fünfecke unterteilen, welche aber nicht regelmäßig sein müssen. Es dürfen bei einer solchen Unterteilung keine Flächen übrig bleiben.

(1) *1 Punkt* Zeichnet je ein konvexes und ein nicht-konvexes Fünfeck.
(2) *6 Punkte* Zeichnet eine Unterteilung eines regelmäßigen Fünfecks in genau elf konvexe Fünfecke.
(3) *2 Punkte* Ist es möglich, eine Unterteilung eines regelmäßigen Fünfecks in genau neun konvexe Fünfecke zu finden? Wenn ja, zeichnet so eine, wenn nein, erklärt, warum das nicht möglich ist.