



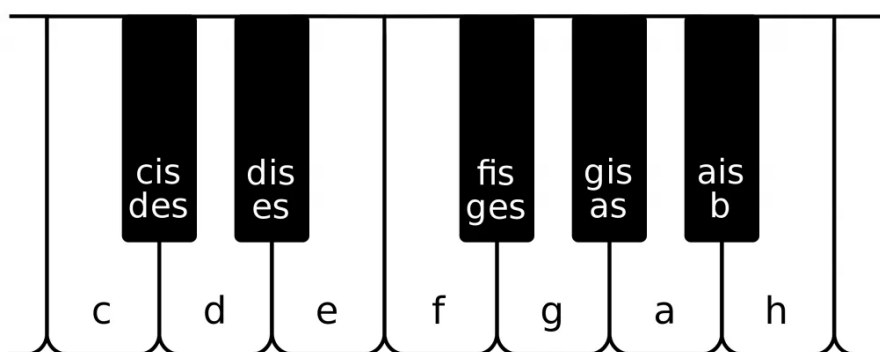
Musik und Mathematik

Zum Start des neuen Schuljahres beschäftigen wir uns mit Mathe und Musik.

Was hat das Stimmen eines Klaviers mit der Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu tun und was Akkorde mit Topologie?

Aus der Musiktheorie ergeben sich viele interessante mathematische Fragen. In den ersten 3 Wochen des Kurses werden wir diese genauer Untersuchen. Es ist keine musikalische Vorbildung nötig, es ist ja ein Mathe-Kurs (ihr lernt aber nebenbei auch ein bisschen Musiktheorie).

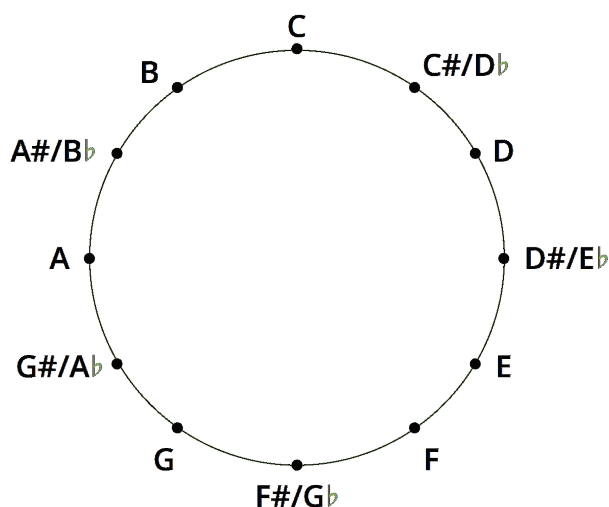
1 Ein paar Hintergründe und Knobelaufgaben



In der neueren westlichen Musik wird eine Oktave üblicherweise in 12 Halbtonschritte eingeteilt, die hier auf der Klavbatur zu sehen sind. Nach dem h beginnen wir erneut mit c. Das höhere c wird im wesentlichen als der gleiche Ton wie das tiefere c wahrgenommen (eben nur höher).

Aufgabe 1 Beginnend bei c wird auf dem Klavier ein (chromatischer) Lauf von 38 Halbtonschritten nach oben gespielt. Auf welchem Ton endet der Lauf?

Genau wie die Stunden auf der Uhr haben die Töne die Struktur einer Gruppe, der Z_{12} . Anschaulich können wir die Töne also auf einem Kreis (also der S^1) anordnen:



Aufgabe 2 In welchem mathematischen Raum lassen sich *Akkorde* (sind mehrere gleichzeitig gespielte Töne) von 2 oder 3 Tönen anordnen?

2 Lösungen

Lösung 1 Wir nummerieren die Töne, $c = 0$, $cis = 1, \dots, h = 12$ und rechnen modulo 12:

$$2 + 38 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Ton 4 ist das e.

Lösung 2 Kommt ab 10.09.2025 in den Kurs um die Lösungen zu erfahren.