Plenarübung zur Vorlesung
Stochastik und ihre Didaktik
Herbstsemester 2023/24

Aufgabe 1 Bei einem Brettspiel würfelt ein Spieler zwei faire sechsseitige Würfel. Er macht dabei pro Runde so viele Punkte wie die Differenz zwischen dem höheren und dem niedrigeren Ergebnis. Wie viele Punkte macht er im Mittel pro Runde?

Aufgabe 2 Der Stürmer A schießt in keinem Spiel mehr als 3 Tore. Die Wahrscheinlichkeit, dass er in einem Spiel kein Tor schießt, ist 20 mal so groß, wie die Wahrscheinlichkeit, dass er drei Tore schießt; die Wahrscheinlichkeit, dass er in einem Spiel genau ein Tor schießt, ist 2,5 mal so groß, wie die Wahrscheinlichkeit, dass er genau zwei Tore schießt. Im Erwartungswert schießt der Stürmer pro Spiel ein Tor. Bestimmen sie in einem geeigneten Modell die Verteilung der Anzahl der geschossenen Tore pro Spiel.

Aufgabe 3 Seien k eine natürliche Zahl. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass die größte gewürfelte Zahl M beim k-maligen Würfeln mit einem 6-seitigen fairen Würfel höchstens m ist für alle $m \in \{1, ..., 6\}$.

Aufgabe 4 In einer Urne befinden sich drei rote und 15 schwarze Kugeln. Ein Spieler nimmt an dem folgenden Spiel teil: Es wird fünfmal mit Zurücklegen gezogen. Werden dabei zwei oder mehr rote Kugeln gezogen, so erhält der Spieler einen Euro. Wird keine rote Kugel gezogen, so muss der Spieler einen Euro zahlen. In dem Fall, dass genau eine rote Kugel gezogen wurde, wird ein zunächst unbekannter Betrag a gezahlt. Dabei bedeutet ein positiver Wert von a einen Gewinn für den Spieler und ein negativer Wert, dass der Spieler diesen Betrag zahlen muss.
Wie muss a gewählt werden, damit das Spiel fair ist? Geben Sie ein geeignetes Modell an.

(Sie dürfen hier zum einfachen Rechnen großzügig runden, etwa $(5/6)^5 \approx 0,4$.)

Aufgabe 5 Sei(Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$.

1. Beweisen Sie: Wenn $P(A) = \frac{1}{3}$ und $P(B) = \frac{3}{4}$ ist, dann gilt $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Geben Sie Beispiele an, bei denen die Grenzen angenommen werden.

2. Beweisen Sie: $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

Lösung Aufgabe 2
Sei X eine Zufallsgröße mit Werten in $\{0, 1, 2, 3\}$ und es gelte

$$P(X = 0) = 20 \cdot P(X = 3),\ P(X = 1) = 2,5 \cdot P(X = 2)$$

und $E(X) = 1$. Schreibe $a := P(X = 3),\ b := P(X = 2)$. X modelliert die Anzahl der geschossenen Tore.
Die Erwartungswert-Bedingung übersetzt sich dann in

$$1 = 0 \cdot 20a + 1 \cdot 2,5b + 2b + 3a = 4,5b + 3a.$$

Da $P(X \in \cdot)$ außerdem eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist, gilt

$$1 = 20a + 2,5b + a + b = 21a + 3,5b.$$

Auflösen liefert $a = 1/84,\ b = 3/14$. (Man sieht insbesondere sofort, dass dadurch tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsfuntion definiert wird, was aus der Aufgabenstellung nicht sofort klar ist.)
Lösung Aufgabe 3
(Die Lösung ist für einen allgemeinen n-Seitigen Würfel)
Modell: Seien $X_1, ..., X_k$ unabhängig und Laplaceverteilt auf $\{1, ..., n\}$ und $M = \max\{X_1, ..., X_k\}$. Die Zufallsgröße X_i beschreibt jeweis den Wurf des i-ten Würfels für alle $i \in \{1, ...k\}$. Weil dieser fair ist, ist die Laplaceverteilung sinnvoll, weil ich nacheinander würfle ist die Unabhängigkeitsannahme gerechtfertigt.
Beh.: Es gilt für alle $m \leq n$

$$P(M \leq m) = \left(\frac{m}{n}\right)^k$$

Beweis:

$$P(M \leq m) = P(X_1 \leq m, ..., X_k \leq m) = \left(\frac{m}{n}\right)^k$$

Lösung Aufgabe 4

Sei hier X $Bin(n,p)$-verteilt mit $n = 5,\ p = 3/18 = 1/6$. X modelliert hier die Anzahl der roten Kugeln bei 5-maligem Ziehen. Dies ist sinnvoll, da unabhängig und identisch-aufgebaute Experimente vorliegen.
Alternativ einmal in lang: Seien $r_1, r_2, r_3, s_1, ...s_{15}$ pw. verschiedene Zahlen. Sei

$$\Omega := \{r_1, r_2, r_3, s_1, ...s_{15}\}^5$$

und P die Laplacefunktion.
Jetzt konstruieren wir eine Zufallsgröße X, die die Anzahl an gezogenen roten Kugeln modellieren soll:
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}; (\omega_1, ..., \omega_5) \mapsto \mid \{i \in \{1,2,3,4,5\} \mid \omega_i \in \{r_1, r_2, r_3\}\} \mid$ Dann gilt

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= (\frac{5}{6})^5 \approx 0,4 \\
P(X=1) &= 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^5 \approx 0,4 \\
P(X=2) &= \binom{5}{2} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^3 \\
P(X=3) &= \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^2 \\
P(X=4) &= \binom{5}{4} \cdot (\frac{1}{6})^4 \cdot (\frac{5}{6}) \\
P(X=5) &= \binom{5}{5} \cdot (\frac{1}{6})^5
\end{aligned}$$

Setze

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}; \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ ,wenn } X(\omega) > 1; \\ a \text{ ,wenn } X(\omega) = 1; \\ -1 \text{ ,wenn } X(\omega) = 0; \end{cases}$$

Y modelliert dann die Auszahlung. Es gilt

$$\begin{aligned}
E(Y) &= 1 \cdot P(Y=1) + a \cdot P(Y=a) + (-1) \cdot P(Y=-1) \\
&= 1 \cdot P(X<2) + a \cdot P(X=1) + (-1) \cdot P(X=0) \\
&\approx 1 \cdot 0,2 + a \cdot 0,4 + (-1) \cdot 0,4 \\
&= a \cdot 0,4 - 0,2
\end{aligned}$$

Interpretiert man nun ein Spiel mit $E(Y) = 0$ als fair, ergibt sich $a \approx 0,5$.

Lösung Aufgabe 5

1. Beweis der Aussage:
   Es ist $A \cap B \subseteq A$, also
   $$P(A \cap B) \leq P(A) = \frac{1}{3}$$
   Weiter ist
   $$P((A \cap B)^c) = P(A^c \cup B^c) \leq P(A^c) + P(B^c) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$
   also folgt
   $$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) \geq \frac{1}{12}$$
   Beispiel für die obere Grenze:
   Sei $\Omega := \{1, 2, 3\}$, P Maß auf Ω gegeben durch
   $$P(\{1\}) = \frac{1}{3}$$
   $$P(\{2\}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$$
   $$P(\{3\}) = \frac{1}{4},$$
   sei $A := \{1\}, B := \{1, 2\}$.
   Dann gilt $P(A) = P\{1\} = \frac{1}{3}, P(B) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{3}{4}$ und $P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{3}$.
   Beispiel für die untere Grenze:
   Sei $\Omega := \{1, 2, 3\}$, P Maß auf Ω gegeben durch
   $$P(\{1\}) = \frac{3}{12}$$
   $$P(\{2\}) = \frac{1}{12}$$
   $$P(\{3\}) = \frac{8}{12},$$
   sei $A := \{1, 2\}, B := \{2, 3\}$. Dann gilt $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ und $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{12}$. Bem.: Man kann natürlich genauso jeweils 12-elementige Mengen nehmen und dann jeweils genau soviele Elemente in A, B und $A \cap B$ werfen, wie die Wahrscheinlichkeit der jeweiligen Mengen in Zwölfteln betragen soll.

2. Es gilt
   $$\begin{aligned} |P(A) - P(B)| &= |P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) - (P((B \cap A) \cup (B \cap A^c)))| \\ &= |P((A \cap B)) + P((A \cap B^c)) - (P((B \cap A) + P((B \cap A^c)))| \\ &= |P(A \cap B^c) - P(B \cap A^c)))| \leq P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) \end{aligned}$$