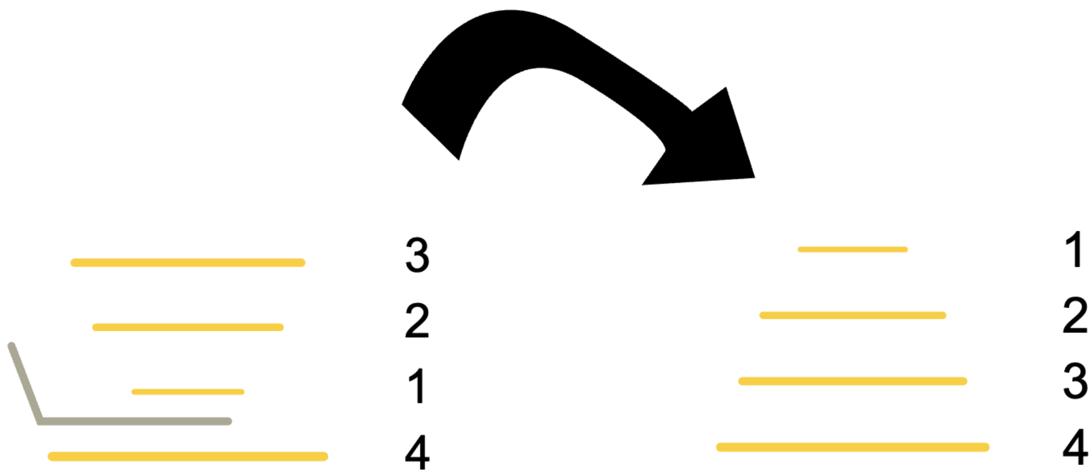
Schuljahr 2022/23
Klassen 9/10

Serie 1

Die Pfannkuchennummer: Stellt euch vor, ihr macht eurer Familie $n \in \mathbb{N}$ Pfannkuchen. Leider geraten diese nicht ganz gleichgroß. Dann möchte man doch zumindest, dass die Pfannkuchen der Größe nach geordnet auf dem Teller liegen. Hier ein Beispiel für $n = 4$:

Meistens jedoch ist das, wenn man die Pfannkuchen einfach irgendwie auf einen Teller legt, nicht so, wie z.B. hier:

In dem Fall ist es unsere Aufgabe, die Pfannkuchen so umzusortieren, dass sie wie auf dem ersten Bild liegen. Dazu dürfen wir aber nicht einfach alle irgendwie neu anordnen. Das einzige, was wir immer wieder machen dürfen, ist mit dem Pfannenwender in den Stapel zwischen zwei beliebige Pfannkuchen hineinzustechen und alles, was über dem Pfannenwender ist umgedreht wieder auf den Stapel zu legen. Zum Beispiel so:



Die *Pfannkuchennummer von* n ist die kleinstmögliche Zahl von solchen "Pfannenwender-Umdrehaktionen", die man benötigt, um einen Stapel mit n Pfannkuchen in die richtige Reihenfolge zu bringen, wenn der Stapel maximal unglücklich durcheinandergebracht ist.

Aufgabe 1 (a) Bestimmt Pfannkuchennummern für möglichst viele n. Benutzt dazu gerne Computer, einfach Zettel und Stift oder Pfannkuchen, wie ihr mögt.

(b) Irgendwann wird es euch nicht mehr gelingen, die genauen Pfannkuchennummern für bestimmte $n \in \mathbb{N}$ zu ermitteln (Bisher haben es Mathematiker:innen nur bis 19 oder 20 geschafft[1]). Entwickelt Formeln, die abhängig vom jeweiligen n angeben, wie groß die Pfannkuchennummern mindestens und höchstens sein können.

Diese Seite:

https://datagenetics.com/blog/february42018/index.html

enthält ein Tool, um virtuell Stapel von Pfannkuchen zu wenden und diese Seite

https://www.youtube.com/watch?v=m3drS_8BpU0

ein Video über das Problem.

[1]siehe: https://oeis.org/A058986

Aufgabe 2 Am einem magischen Baum hängen 25 reife Äpfel und 25 reife Bananen. Man kann diese Früchte pflücken, jedoch immer nur genau zwei auf einmal. Wenn man zwei Früchte derselben Art pflückt, wächst sofort ein reifer Apfel nach. Wenn man einen Apfel und eine Banane gemeinsam Pflückt, wächst sofort eine reife Banane nach.

(a) Bestimmt, was für eine Frucht am Baum übrig bleibt, wenn man solange Früchte pflückt, bis man nicht mehr weiter pflücken kann.

(b) Untersucht, wie sich das Ergebnis von (a) ändert, wenn man die Anzahlen der am Anfang am Baum hängenden Früchte variiert.

Aufgabe 3 Im Folgenden sei i die im Onlinekurs definierte Komplexe Zahl mit der Eigenschaft, das $i^2 = -1$ gilt. Bringt folgende Komplexe Zahlen in die Form $a + bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gelten soll:

(a) $\frac{2-3i}{3+2i}$

(b) $\frac{1+i}{1-i}$

(c) $\frac{1-i}{1+i}$

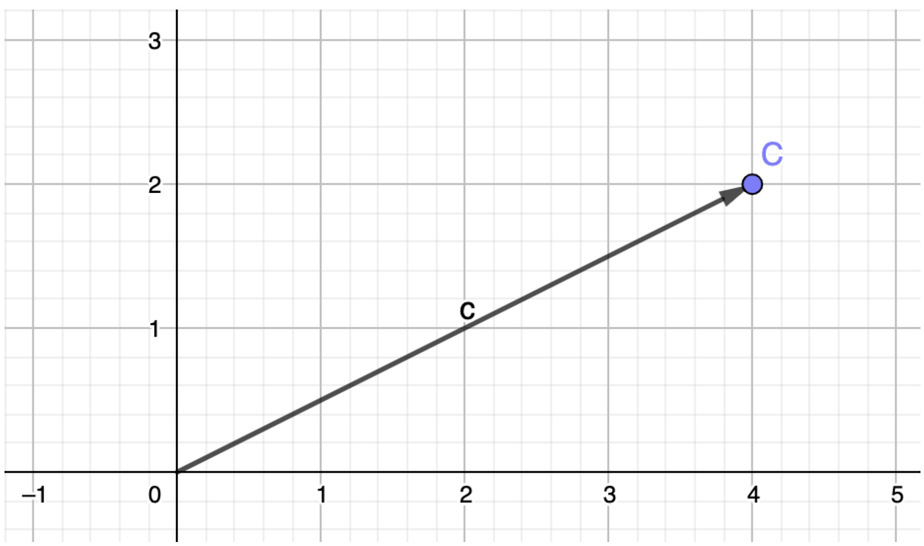
(d) $\sqrt{i}$

Entwickelt selber möglichst kompliziert aussehende Terme, die sich zu einem möglichst einfachen Term vereinfachen lassen.

Info: Sei $c := a + bi$ *eine komplexe Zahl mit Realteil* $a \in \mathbb{R}$ *und Imaginärteil* $b \in \mathbb{R}$. *Dann definieren wir den Betrag von* c *durch*

$$| c | := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Warum, dass kann man sich sehr schön geometrisch erklären, wenn man die Zahl c *in die Zeichenebene zeichnet. Der Realteil ist dabei die x-Koordinate, der Imaginärteil die y-Koordinate. Hier ein Beispiel mit* $a = 4$, *und* $b = 2$. *Erklärt, wo man den Betrag in der Grafik findet.*



Aufgabe 4 Seien a, b natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lassen. Zeige, dass das Produkt $a * b$ sich ebenfalls als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt.

Hinweis: Es gibt eine sehr schöne Lösung, die Komplexe Zahlen benutzt.

Die Aufgaben werden nächste Woche in den Mentor:innengruppen besprochen. Kommt dazu gerne einfach in die jeweiligen Meetings.