Reine Mathematik

January 10, 2023

Contents

Chapter 1

Elementare Zahlentheorie

1.1 Primzahlen und Teilbarkeit

In diesem Abschnitt werden wir die Teilt-Relation Kennenlernen und genauer untersuchen, ggt, kgv sowie Primzahlen definieren. Das Hauptresultat des Abschnittes ist die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

1.1.1 Teilbarkeit

Definition 1 Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir definieren

$$a \mid b :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : a \cdot x = b$$

oder in Worten: a teilt b genau wenn eine ganze Zahl x existiert so, dass gilt $a \cdot x = b$.

Lemma 1 Die Relation | ist eine Ordnungsrelation. Das bedeutet:

(i) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \mid a$ (Reflexivität)

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : ((a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b)$ (Antisymmetrie)

(iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ((a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c)$ (Transitivität)

Lemma 2 Es gilt: $\forall a, b, c, m, n \in \mathbb{Z} : ((a \mid b \land a \mid c) \Rightarrow a \mid mb + nc)$

Aufgabe 1 Zeige, indem du Beispiele angibst, dass die Umkehrung der Implikation im vorigen Lemma nicht gilt.

Definition 2 Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ definiere

$$\operatorname{ggt}(a, b) := \max\{t \in \mathbb{Z} : t \mid a \wedge t \mid b\}$$

$\operatorname{ggt}(a, b)$ heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b.

Aufgabe 2 Zeige, dass für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ für alle Zahlen $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \mid a$ und $t \mid b$ gilt, dass

$$t \mid \operatorname{ggt}(a, b).$$

Satz 1 (Division mit Rest) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b > 0$. Dann gibt es eindeutige Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < b$ und

$$a = qb + r$$

Lemma 3 Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

1. $ggt(a, b) = ggt(b, a)$,
2. $ggt(a, b) = ggt(a, b - qa)$,
3. Sei $g := ggt(a, b)$ Dann gilt: $ggt(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$.

Satz 2 (Lemma von Bezout)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$.

1. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit
$$ggt(a, b) = ax + by$$
2. für alle $u, v \in \mathbb{Z}$ gilt
$$ggt(a, b) \mid au + bv$$

1.2 Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik

1.2.1 Beweis

1.2.2 Anwendung: Kgv

1.2.3 Mersenne- und Fermat- Primzahlen