Aufgabenzirkel - Serie 3

Aufgabe 1 Nach einem Diebstahl gibt es drei Verdächtige, Anton, Bert und Cedric, von denen zumindest einer ein Dieb ist. Nachdem sie und die Zeugen getrennt befragt wurden, kennt die Polizei die folgenden Fakten.

i) Wenn Anton ein Dieb ist, dann müssen Bert oder Cedric ebenfalls Diebe sein.

ii) Wenn Bert ein Dieb ist, dann ist Anton unschuldig.

iii) Wenn Cedric ein Dieb ist, dann ist auch Bert ein Dieb.

Leite mithilfe einer Wahrheitstafel, durch Aufstellen und umformen von logischen Aussagen oder durch Argumentieren her, wer sicher ein Dieb, wer sicher kein Dieb und bei wem es nicht klar ist, ob er ein Dieb ist.

Aufgabe 2 Seien A und B Aussagen. Finde eine Möglichkeit, aus der Zeichenreihe

$$\neg A \vee B \wedge A \Rightarrow B \Leftrightarrow A$$

durch Setzen von Klammern eine Tautologie (d.h. eine bei jeder möglichen Belegung der Variablen A, B durch die beiden Wahrheitswerte wahre Aussage) zu machen!

Aufgabe 3 Wir bezeichnen für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Einerziffer mit n_0, die Zehnerziffer mit n_1, die Hunderterziffer mit n_2, usw. Wenn für eine natürliche Zahl n die Zahl k die höchste natürliche Zahl mit $n_k \neq 0$ ist, können wir n folgendermaßen ausdrücken:

$$n = 1 * n_0 + 10 * a_1 + 100 * a_2 + ... + 10^k * a_k$$

(a) Finde $n_0, n_1, ...n_5$ in den Fällen $n = 13$, $n = 171$ und $n = 543210$.

(b) Um herauszufinden, dass eine natürliche Zahl n durch 9 teilbar ist, kann man folgenden Mathematischen Satz benutzen:
Satz 1: *Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.*
Überprüfe mithilfe von Satz 1, ob 3123 und 123456789987654321 durch 9 teilbar sind.

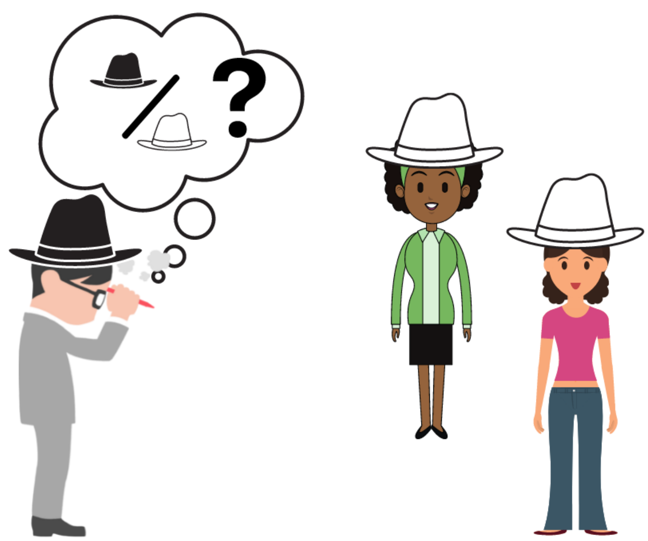
(c) Formuliere Satz 1, indem du die Darstellung n_0, n_1, ... für die Ziffern einer natürlichen Zahl n benutzt.

(d) Beweise Satz 1.

(e) (★) Gebe Regeln für die Teilbarkeit durch 11 und 7 an[1] und beweise die zugrundeliegenden mathematischen Sätze.

[1] Du darfst gerne in Mathebüchern oder Internet suchen, regeln nehmen die du schon kennst oder dir selber welche ausdenken.

Aufgabe 4 *Dieses Rätsel wird in der Stochastik-Arbeitsgruppe an der Uni KIel gerne neuen Doktorand:innen gestellt, einige von ihnen duften das Spiel auch schon live spielen:*
In einer Gameshow spielen drei Kandidat:innen folgendes Spiel. Die Showmasterin setzt allen Kandidat:innen zufällig (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) entweder einen schwarzen oder einen weißen Hut auf. Die Kandidat:innen sehen jeweils die Hüte der anderen, nicht aber den eigenen. Nachdem sie die Hüte bekommen haben, dürfen sie in keiner Weise miteinander kommunizieren (sie dürfen sich aber vorher eine gemeinsame Taktik überlegen). Alle Kandidat:innen müssen dann verdeckt entweder die eigene Hutfarbe oder "ich passe" aufschreiben. Wenn dabei mindestens ein:e Kandidat:in die eigene Farbe richtig rät und niemand die falsche Farbe rät, gewinnen die Kandidat:innen, wenn mindestens einmal eine falsche Farbe geraten wird, verlieren sie.



(a) Gib eine möglichst gute Strategie für die Kandidat:innen an. Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit bei deiner Strategie.

(b) die Schowmasterin ändert die Regeln: Jetzt gewinnen die Kandidat:innen nur dann, wenn alle ihre Hutfarbe richtig raten. Ist ihre maximale Gewinnwahrscheinlichkeit jetzt immer noch besser als $\frac{1}{8}$? Begründe deine Antwort!