Schuljahr 2021/22
Klassenstufen 9/10

Aufgabenzirkel - Serie 3

Aufgabe 1 Nach einem Diebstahl gibt es drei Verdächtige, Anton, Bert und Cedric, von denen zumindest einer ein Dieb ist. Nachdem sie und die Zeugen getrennt befragt wurden, kennt die Polizei die folgenden Fakten.

i) Wenn Anton ein Dieb ist, dann müssen Bert oder Cedric ebenfalls Diebe sein.

ii) Wenn Bert ein Dieb ist, dann ist Anton unschuldig.

iii) Wenn Cedric ein Dieb ist, dann ist auch Bert ein Dieb.

Leite mithilfe einer Wahrheitstafel, durch Aufstellen und umformen von logischen Aussagen oder durch Argumentieren her, wer sicher ein Dieb, wer sicher kein Dieb und bei wem es nicht klar ist, ob er ein Dieb ist.

Aufgabe 2 Seien A und B Aussagen. Finde eine Möglichkeit, aus der Zeichenreihe

$$\neg\, A \vee B \wedge A \Rightarrow B \Leftrightarrow A$$

durch Setzen von Klammern eine Tautologie (d.h. eine bei jeder möglichen Belegung der Variablen A, B durch die beiden Wahrheitswerte wahre Aussage) zu machen!

Aufgabe 3 Eine natürliche Zahl ist genau dann eine Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Zahlen als Teiler hat. Für jede natürliche Zahl n definieren wir $n!$ (gesprochen "n Fakultät") als das Produkt der natülichen Zahlen von 1 bis n, (also $n! := 1 * 2 * ....(n-1) * n$)

(a) Überprüfe, ob 10, 91, 17!, 1, 0 und -7 jeweils Primzahlen sind.

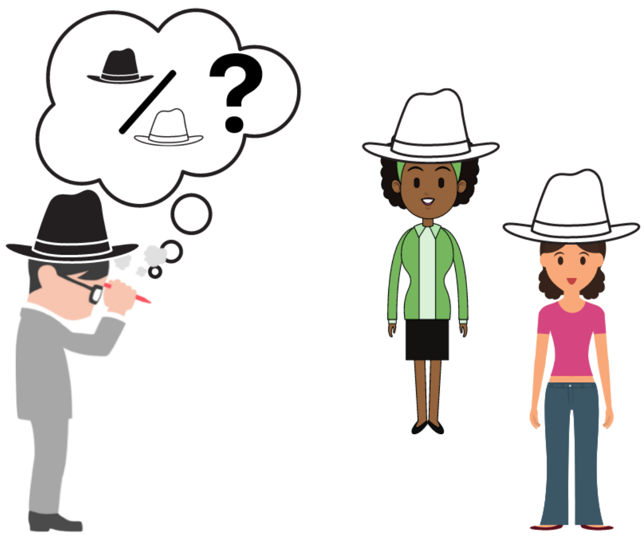
(b) Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 2$ und k eine natürliche Zahl mit $2 \leq k \leq n$. Zeige, dass die Zahlen $n!$ und $n! + k$ keine Primzahlen sind.

(c) (★) Sei n eine natürliche Zahl. Beweise, dass es n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die alle keine Primzahlen sind.

(d) Sei n eine natürliche Zahl. Beweise, dass es n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, unter denen genau 2 Primzahlen sind. Du darfst dafür das Resultat aus (c) sowie den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, benutzen.

Aufgabe 4 *Dieses Rätsel wird in der Stochastik-Arbeitsgruppe an der Uni Kiel gerne neuen Doktorand:innen gestellt, einige von ihnen duften das Spiel auch schon live spielen:*

In einer Gameshow spielen drei Kandidat:innen folgendes Spiel. Die Showmasterin setzt allen Kandidat:innen zufällig (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) entweder einen schwarzen oder einen weißen Hut auf. Die Kandidat:innen sehen jeweils die Hüte der anderen, nicht aber den eigenen. Nachdem sie die Hüte bekommen haben, dürfen sie in keiner Weise miteinander kommunizieren (sie dürfen sich aber vorher eine gemeinsame Taktik überlegen). Alle Kandidat:innen müssen dann verdeckt entweder die eigene Hutfarbe oder "ich passe" aufschreiben. Wenn dabei mindestens ein:e Kandidat:in die eigene Farbe richtig rät und niemand die falsche Farbe rät, gewinnen die Kandidat:innen. Wenn mindestens einmal eine falsche Farbe geraten wird, verlieren sie.



(a) Gib eine möglichst gute Strategie für die Kandidat:innen an. Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit bei deiner Strategie.

(b) Die Schowmasterin ändert die Regeln: Jetzt gewinnen die Kandidat:innen nur dann, wenn alle ihre Hutfarbe richtig raten. Ist ihre maximale Gewinnwahrscheinlichkeit jetzt noch besser als $\frac{1}{8}$? Begründe deine Antwort!