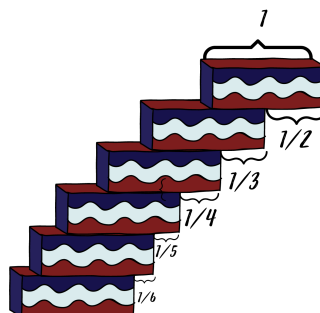




Aufgabenzirkel - Serie 1



*Diesen Turm kann man endlos weiterbauen ohne, dass er umfällt!
Aber wird er auch unendlich breit?*

Aufgabe 1 Manchmal kommen dir vielleicht einige Schulbuchaufgaben mit langen Rechentürmchen fast endlos vor. Diese beiden Türmchen sind wirklich endlos (und hoffentlich trotzdem spannend):

$$\begin{aligned}
 1 &= \\
 1 + \frac{1}{2} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} &= \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

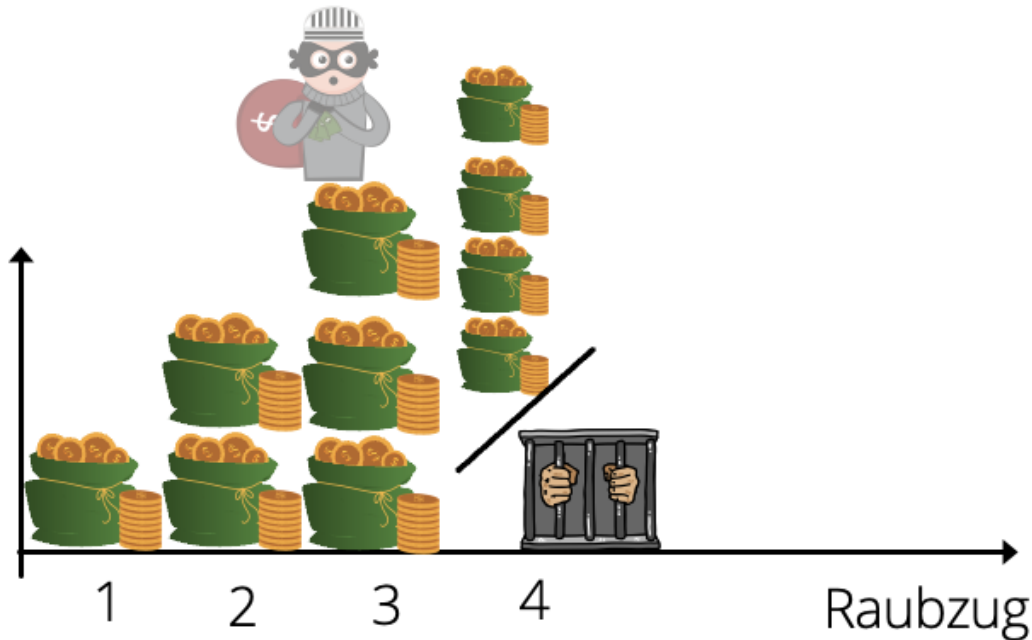
$$\begin{aligned}
 1 &= \\
 1 + \frac{1}{2} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &= \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} &= \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

- Löse jeweils die Gleichungen, dann gebe die nächsten drei Gleichungen mit Lösung an.
- Gebe jeweils die 11., 13. und 23. Gleichung samt Lösung an (benutze gerne Computer). Dann beschreibe die Regel, nach der die Gleichungen jeweils gebildet werden.
- Zeichne (z.B. mit Geogebra) jeweils einige Ergebnisse in ein geeignetes Koordinatensystem.
- Stelle für beide Türmchen anhand der Ergebnisse aus (a) bis (c) eine Vermutung auf, ob die Ergebnisse eine obere Schranke¹ haben oder nicht. Beweise deine Vermutung.

¹Eine reelle Zahl K ist dann eine obere Schranke, wenn für jedes Ergebnis F einer der Gleichungen gilt: $F < K$.



Aufgabe 2 Die Ganovenbrüder Bigtime Beagle und Burger Beagle rauben Banken aus. Bei jedem Raubzug erbeuten sie mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ eine Million Euro. Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ werden sie geschnappt, gehen ins Gefängnis und verlieren ihre gesamte bisher geraubte Beute.



- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Bigtime und Burger nach spätestens 2 Raubzügen geschnappt werden.
- Berechne, wie viel Geld Bigtime und Burger im Mittel nach 2 Raubzügen erbeutet haben.
- Wann sollten die beiden aufhören, wenn sie im Mittel möglichst viel Geld verdienen wollen?



Aufgabe 3 Bigtime und Burger wurden geschnappt. Die Polizistinnen setzen sie getrennt voneinander in Verhörräume und bieten Ihnen jeweils Strafminderung an, wenn sie gestehen und den jeweils anderen verraten. Es können folgende Ausgänge auftreten, sie können sich vor oder während der Verhöre nicht absprechen:

1. Beide schweigen: Dann bekommen beide, weil es keine klaren Beweise für den Bankraub gibt, nur 2 Jahre Gefängnis für den Diebstahl des Fluchtwagens.
2. Eine:r gesteht, eine:r schweigt: Dann bekommt der oder die Gestehende als Kronzeug:in nur 1 Jahr Gefängnis. Der oder die Schweigende bekommt die Höchststrafe von 6 Jahren.
3. Beide gestehen: Dann bekommen beide, weil sie mit der Polizei kooperieren, 4 Jahre Gefängnis.

Table 1: Gefängnisstrafen in Jahren je nach Entscheidungen

		Burger	
		Schweigen	Gestehen
Bigtime	Schweigen	B:2 C:2	B:6 C:1
	Gestehen	B:1 C:6	B:4 C:4

- (a) Erkläre, was für Bigtime in den beiden Fällen, dass Burger schweigt und dass Burger gesteht, das Beste ist, wenn er seine eigene Strafe minimieren möchte.
- (b) Wie geht die Situation aus, wenn beide die eigene Strafe minimieren wollen? Begründe deine Antwort.
- (c) Modifiziere die Strafen so, dass andere Ausgänge auftreten. Beschreibe, was dir auffällt.