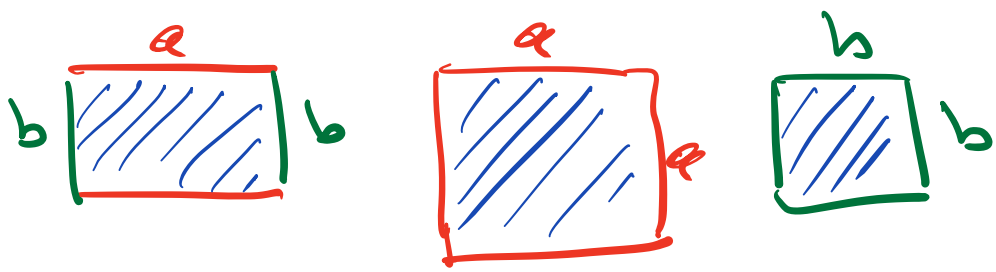
Ungleichungen / Gleichheiten aus geometrischer Sicht



Fl.inh: ab $\boxed{a \cdot a = a^2}$ b^2

Was bedeutet a^2?

z.B. $a = 1$, $a^2 = a \cdot a = 1 \cdot 1 = 1$

$a = 2$, $a^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$a = 3$, $a^2 = 9$

usw

Übrigens, es geht auch für negative Zahlen, z.B. $a = -1$, $a^2 = 1$

Frage: Stimmt es, daß

$$(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$$

für beliebige nicht-negative Zahlen a, b?

(Was bedeutet "größer oder gleich", geschrieben "$\geq$"

✓)

$a = 1, \quad b = 3$

$$\underbrace{(1+3)^2}_{4^2 = 16} \geq \underbrace{1^2 + 3^2}_{1+9=10} \quad ✓$$

$a = 2 \quad , \quad b = 8$

$(2+8)^2 \qquad 2^2 + 8^2$

$100 \geq 4 + 64 = 68$ ✓

$a = 1 \quad , \quad b = 1$

$(1+1)^2 \qquad 1^2 + 1^2$

$2^2 = 4 \geq 1 + 1 = 2$ ✓

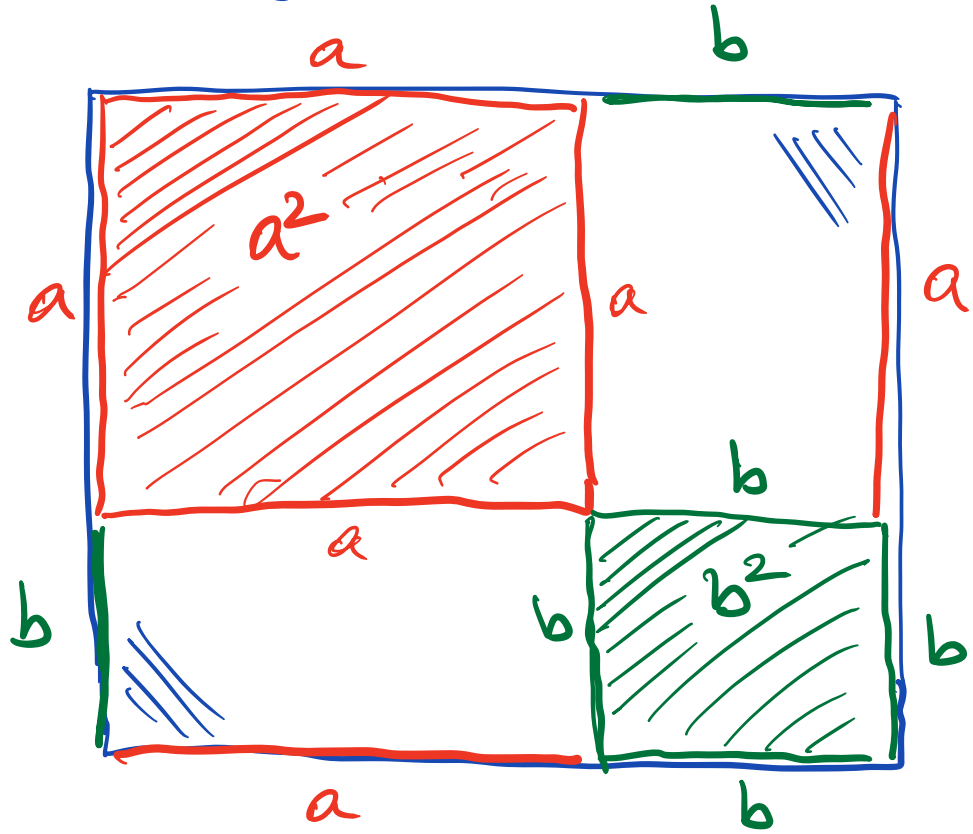
$a = 0 \quad , \quad b = 0$

$\underbrace{(0+0)^2}_{\overset{\shortparallel}{0}} \qquad \underbrace{0^2 + 0^2}_{0}$

$0 \geq 0$ ✓

(Erinnerung:
$2 \geq 1$, $2 \geq 0$, aber auch
$2 \geq 2$, $0 \geq 0$)

Wie läßt sich diese Ungleichung ganz allgemein nachweisen?

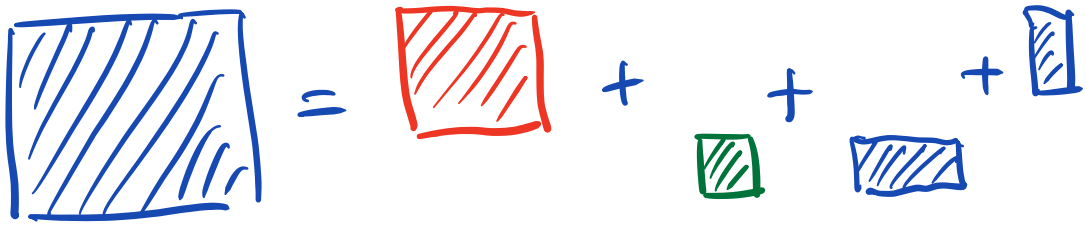


Was läßt sich beobachten?

Fl. inh. des großen Q's — Summe der Fl. inh's der kleinen Quadrate

$$(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$$

Wir können auch eine Gleichheit auf diese Weise nachweisen:



(Flächeninhalte)

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{ab+ab}_{2ab}$$

Es ergibt sich

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(Binomische Formel)

(<u>Bem</u>: Die binom. Formel gilt für alle Zahlen a, b!)

Als nächstes:

Eine Ungleichung zwischen Mittelwerten

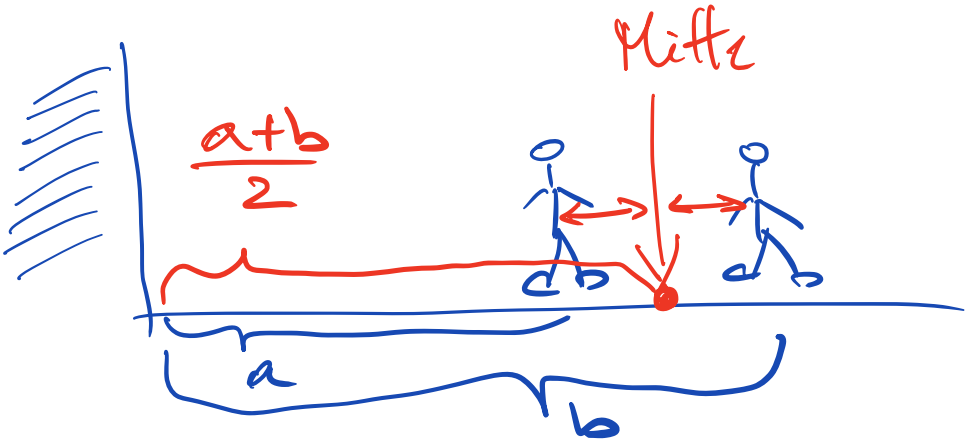
- arithmetisches Mittel (AM)
- geometrisches Mittel (GM)

schon bekannt:

<u>Arithmetisches Mittel</u> zweier Zahlen a und b ist $\frac{a+b}{2}$

z.B. $a=3$, $b=5$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$



Es gibt auch das <u>geometrische Mittel</u> (GM) zweier <u>positiver</u> Zahlen a und b, nämlich

$$\sqrt{ab}$$

Wissen alle, was die Quadratwurzel einer <u>positiven</u> Zahl x ist?

<u>z.B.</u>: $x = 9$, $\sqrt{x} = 3$

QW ist diejenige (<u>pos</u>) Zahl, die zum Quadrat die ursprüngliche Zahl ergibt.

<u>Bsp</u>: $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 3^2 = 9$

weitere Bsp'e

$x = 4$, $\sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

$x = 25$, $\sqrt{x} = \sqrt{25} = 5$

$x = 1$, $\sqrt{1} = 1$

aber auch

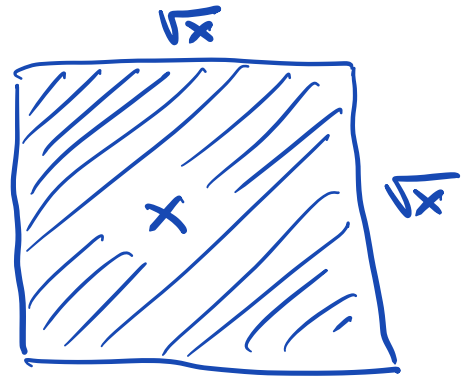
$x = 2{,}25$, $\sqrt{x} = \sqrt{2{,}25} =$
$= 1{,}5$

<u>weil:</u>

$$1{,}5 \cdot 1{,}5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} =$$
$$= \frac{8+1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$
$$= 2{,}25$$

<u>geometrische Sichtweise:</u>

Quadrat;
Fl. inh. bekannt;
was ist die Seitenlänge?

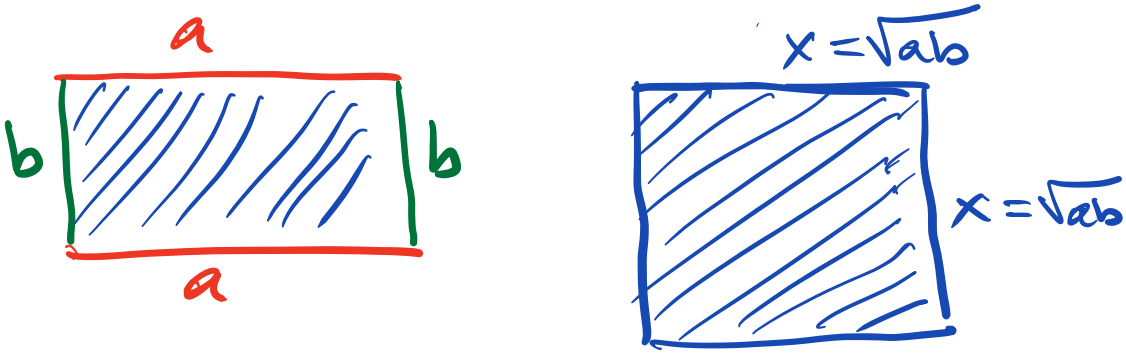


Zurück zum geometrischen Mittel von a und b, nämlich

$$\sqrt{ab}$$

Warum interessant?

"geometrischer Grund"



Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrates mit gleichem Fl. inh.?

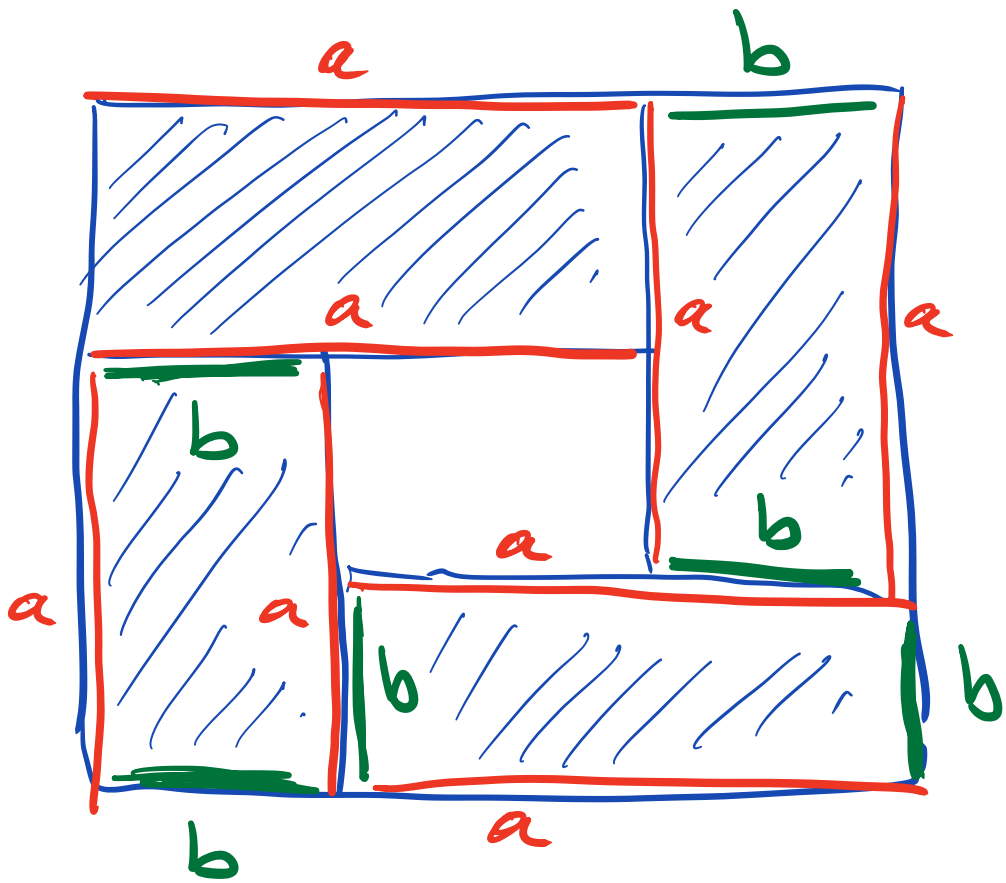
Fl. inh. $= ab = x^2$, also $x = \sqrt{ab}$

Frage: Gegeben beliebige positive Zahlen a und b, ist das AM $\frac{a+b}{2}$ oder das GM $\sqrt{ab}$ größer?

Ungleichung ist in der Tat

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Frage: Was läßt sich bzgl. der Flächeninhalte der Quadrate/Rechtecke sagen?


a
b
a
a
a
b
b
a
a
a
b
b
b
a