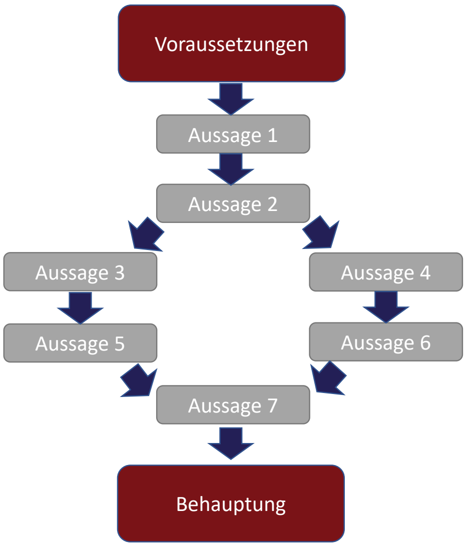
1 Was ist ein Beweis?

In einem Beweis wird aus Aussagen, die als wahr angenommen werden, die Wahrheit einer anderen Aussage gefolgert. Die Aussagen, deren Wahrheit angenommen wird, heißen *Voraussetzungen*. Diejenige, die gefolgert wird, ist die *Behauptung*. Ein Beweis ist also das Folgern der Behauptung aus der Voraussetzung.



Wichtig hierbei ist, dass der Beweis allgemeingültig ist. Will man Beispielsweise eine Aussage über alle natürlichen Zahlen treffen, müssen die Folgerungen im Beweis auch für alle natürlichen Zahlen richtig sein. Es reicht dann nicht, nur ein paar Beispiele zu betrachten.
Außerdem sollte der Beweis in kleinen, gut nachvollziehbaren Schritten erfolgen. Es ist nicht gut, möglichst viel im Kopf zu machen und nur wenig aufzuschreiben. Denn man will den Leser*innen so viel Denkarbeit wie möglich abnehmen.
Man kann sich vorstellen, dass man eine sehr strenge Richterin überzeugen muss, die ständig "Was ist mit...?" und "Warum?" fragt. Erst, wenn Sie keine Fragen mehr hat, ist der Beweis fertig.

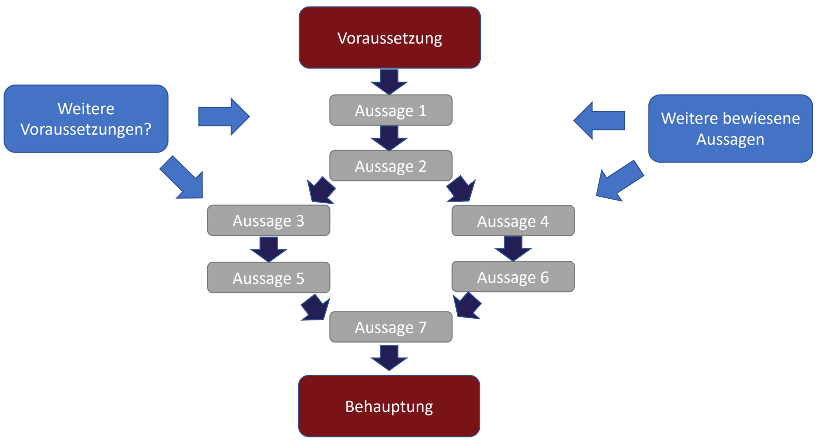
Jeder Beweis ist anders. Es gibt aber bestimmte Strukturen, die immer sinnvoll sind. Zunächst ist nicht immer direkt klar, was die Voraussetzung und was die Behauptung ist. Voraussetzung und Behauptung exakt voneinander zu trennen, ist also der erste wichtige Schritt.

Zu Beginn des Beweises wird dann festgelegt, mit welchen Objekten gearbeitet wird. Soll etwa eine Aussage über alle natürlichen Zahlen bewiesen werden, wäre ein Anfang "Sei n eine natürliche Zahl". n ist dann eine Variable und steht für den Rest des Beweises für eine beliebige natürliche Zahl. Außerdem werden am Anfang oft weitere wichtige Objekte definiert.

Als erste Folgerung werden dann oft wichtige Informationen über die definierten Objekte gesammelt. Geht es etwa um eine Aussage über die Teiler einer gegebenen Zahl, ist es eine wichtige Information, welche Teiler die Zahl hat.

Sind genügend Informationen zusammengesammelt, werden diese miteinander verknüpft. Die Verknüpfungen können dabei sehr verschieden sein. Manchmal sind es Rechnungen, manchmal geometrische Überlegungen.

Oft ist es auch hilfreich, bereits bekannte Aussagen zu benutzen. Solche unbewiesenen Hilfsaussagen sind dann manchmal noch selber zu beweisen oder man muss angeben, wo die Aussagen herkommen.
Man muss vorsichtig sein, nicht aus Versehen weitere Voraussetzungen zu benutzen, die man gar nicht benutzen darf oder möchte.



Am Ende sollte man mit der letzten Schlussfolgerung die Behauptung erreichen (Wenn nicht, kann aber aus einem Fehler manchmal neue Information gesammelt werden und man versucht es noch einmal). Für viele Aussagen gab es erst sehr viele fehlgeschlagene Versuche, bevor ein richtiger Beweis gefunden werden konnte. Das Wichtigste ist, sich von den Fehlern nicht entmutigen zu lassen.

2 Ein Beweis über vollkommene Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir den Beweis einer Aussage über vollkommene Zahlen vorstellen. Um den Beweis führen zu können, müssen wir zunächst genau definieren, mit welchen Objekten wir arbeiten werden. Dies geschieht in den Definitionen:

Definition

Die echte Teilersumme einer natürlichen Zahl a ist die Summe ihrer echten Teiler, das heißt der Teiler, die nicht die Zahl selbst sind. Wir schreiben die echte Teilersumme von a als $\sigma(a)$.

Beispiel: $a = 8$ hat die echten Teiler $1, 2, 4$. Somit gilt: $\sigma(8) = 1 + 2 + 4 = 7$. Beachte, dass 8 zwar euch ein Teiler von 8 ist, aber kein echter Teiler, weil es die Zahl selbst ist.

Definition

Eine natürliche Zahl a heißt vollkommen, wenn sie gleich ihrer echten Teilersumme ist, also $\sigma(a) = a$ gilt.

Beispiel: $a = 6$ hat die echten Teiler $1, 2$ und 3, sodass $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 = 6$ gilt. 6 ist also eine vollkommene Zahl.

Eine zu beweisende Aussage in der Mathematik wird auch als ”‘Satz”’ bezeichnet. Im Folgenden stellen wir erst einen Satz und dann den zugehörigen Beweis vor. Dieser ist so aufgeschrieben, wie er sich etwa in einem Lehrbuch finden würde. Dabei sind manche Schlussfolgerungen nicht immer direkt verständlich. Zur Unterstützung sind manche Stellen gelb unterlegt. Wenn ihr mit dem Mauszeiger über die Stellen geht, wird euch jeweils eine genauere Erklärung der Rechnung angezeigt. Außerdem finden sich an der Seite grüne Notizen. Wenn ihr mit der Maus über diese geht, wird euch angezeigt, zu welchem Teil der oben erklärten allgemeinen Struktur die Zeile gehört.

Satz

Wenn n eine natürliche Zahl und $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$ eine Primzahl ist, dann ist $2^n \cdot (1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n)$ eine vollkommene Zahl.

Beispiel

Um auf die Idee für einen Beweis zu kommen ist es oftmals sinnvoll, sich zunächst ein Beispiel anzuschauen. Dabei lässt sich dann manchmal schon die Struktur erkennen, die auch im Allgemeinen gilt. Wir betrachten hier das Beispiel $n=4$. Dann gilt

$$1+2+2^2+2^3+2^4 = 1+2+4+8+16 = 31.$$

Da 31 eine Primzahl ist, ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt. Der Satz sagt nun, dass $a := 2^4 \cdot 31 = 496$ eine vollkommene Zahl ist. Um dies zu überprüfen, müssen wir die echten Teiler von 496 berechnen. Hier hilft es nun, dass wir die Primfaktorzerlegung von 496 leicht erkennen können, denn diese ist gerade

$$496 = 2^4 \cdot 31 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31.$$

Die Teiler von 496 sind nun genau die Produkte der Primfaktoren, sowie die 1. Damit haben wir zum einen die Teiler, die sich aus den 2-en ergeben und die 1, also:

$$1, 2, 4, 8, 16.$$

Diese ergeben in der Summe $1+2+4+8+16 = 31 = 1 \cdot 31$.
Außerdem haben wir noch die Teiler, die von der 31 der Primfaktorzerlegung herkommen:

$$1 \cdot 31, 2 \cdot 31, 4 \cdot 31, 8 \cdot 31, 16 \cdot 31.$$

Nun ist $31 \cdot 16 = 496$ gerade die Zahl a, also kein echter Teiler. Die übrigen Teiler ergeben in der Summe

$$31 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 31 \cdot 4 + 31 \cdot 8 = 31 \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = 15 \cdot 31.$$

Insgesamt erhalten wir damit für die echte Teilersumme

$$\sigma(496) = 1 \cdot 31 + 15 \cdot 31 = 16 \cdot 31 = 496.$$

Es ist also tatsächlich die echter Teilersumme von 496 wieder 496.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 1 \cdot 31$$

$$496 = 16 \cdot 31 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31 \qquad 1 \cdot 31 + 15 \cdot 31 = 16 \cdot 31 = 496$$

$$1 \cdot 31 + 2 \cdot 31 + 4 \cdot 31 + 8 \cdot 31 = (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 31 = 15 \cdot 31$$

Der allgemine Beweis funktioniert nun ganz ähnlich zu diesem Beispiel, nur können nicht die spezifischen Zahlen benutzt werden. Der wichtigste Schritt in diesem Beispiel war aber, dass wir die Primfaktorzerlegung benutzen konnten, um die Teiler zu bestimmen, und das geht in der Situation des Satzes immer.

Beweis

Es sei n eine natürliche Zahl und $p := 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ eine Primzahl.

Nun sei $a := 2^n \cdot (1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = 2^n \cdot p$.

Da p eine Primzahl ist, hat a genau die folgenden Teiler:

$$1,\ \ 2,\ \ 2^2,\ \ 2^3, \ldots,\ \ 2^n,$$
$$p,\ \ 2p,\ \ 2^2p,\ \ 2^3p, \ldots,\ \ 2^np.$$

Weil $2^np = a$ ist, ist 2^np kein echter Teiler. Deswegen gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma(a) &= 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+p+2p+2^2p+2^3p+\ldots+2^{n-1}p+2^np-2^np \\
&= (1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n)+(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n)p-2^np \\
&= p+(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n)p-2^np \\
&= p+(2^{n+1}-1)p-2^np \\
&= p+2^{n+1}p-p-2^np \\
&= 2^{n+1}p-2^np \\
&= 2\cdot 2^np-2^np \\
&= 2a-a \\
&= a.
\end{aligned}$$

Also gilt $\sigma(a) = a$, sodass a eine vollkommene Zahl ist. $\square$

In dem Beweis wurden zwei Aussagen benutzt, von denen nicht direkt klar ist, warum sie gelten. Der Beweis ist deshalb nur dann gültig, wenn auch diese Hilfssätze gültig sind. Sie unterscheiden sich von Voraussetzungen dadurch, dass sie bewiesen werden können, auch wenn der Beweis vielleicht gerade nicht aufgeschrieben ist. In der Mathematik ist es oft für einen Beweis nötig, solche Hilfssätze zu verwenden. Zur Übersicht sind die beiden hier verwendeten Hilfssätze hier noch einmal genau aufgeschrieben. Vielleicht findest du ja selber einen Beweis für sie?

Hilfssatz 1

Sei n eine natürliche Zahl mit der Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ für Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Dann sind die Teiler von n genau die Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, sowie beliebige Produkte dieser Primzahlen.

Hilfssatz 2

Sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$